



# Modèle hybride incertain pour le calcul de réponse en fonctionnement d'un alternateur

Antoine Kuczkowiak

## ► To cite this version:

Antoine Kuczkowiak. Modèle hybride incertain pour le calcul de réponse en fonctionnement d'un alternateur. Mécanique [physics.med-ph]. Université de Franche-Comté, 2014. Français. <NNT : 2014BESA2033>. <tel-01263702>

**HAL Id: tel-01263702**

**<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01263702>**

Submitted on 28 Jan 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# SPIM

Thèse de Doctorat



école doctorale **sciences pour l'ingénieur et microtechniques**  
UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

## **MODÈLE HYBRIDE INCERTAIN POUR LE CALCUL DE RÉPONSE EN FONCTIONNEMENT D'UN ALTERNATEUR**

 **ANTOINE KUCZKOWIAK**

The logo for SPIM (École doctorale SPIM) features a solid yellow horizontal bar on the left, followed by the letters 'SPIM' in a white, sans-serif font.

■ École doctorale SPIM 16 route de Gray F - 25030 Besançon cedex  
■ tél. +33 (0)3 81 66 66 02 ■ [ed-spim@univ-fcomte.fr](mailto:ed-spim@univ-fcomte.fr) ■ [www.ed-spim.univ-fcomte.fr](http://www.ed-spim.univ-fcomte.fr)

The logo for the University of Franche-Comté (UFC) consists of the letters 'UFC' in a large, bold, white serif font. To the left of the 'U' is a small yellow vertical bar. Below 'UFC' are the words 'UNIVERSITÉ' and 'DE FRANCHE-COMTÉ' in a smaller, white, sans-serif font.

# SPIM

## Thèse de Doctorat



école doctorale **sciences pour l'ingénieur et microtechniques**  
UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

*Thèse présentée par*

**Antoine Kuczkowiak**

*pour obtenir le*

GRADE DE DOCTEUR

DE L'UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

spécialité Mécanique

### **MODÈLE HYBRIDE INCERTAIN POUR LE CALCUL DE RÉPONSE EN FONCTIONNEMENT D'UN ALTERNATEUR**

*Soutenue le 12 Novembre 2014 devant la commission d'Examen :*

Rapporteurs	F.M. HEMEZ	Los Alamos National Laboratory, États-Unis
	G. PUEL	Rtqhgugwt, École Centrale Paris."Rctku
Examineurs	E. BALMÈS	Professeur, École des Arts et Métiers ParisTech, Paris
	M. CORUS	Ingénieur"ej gtej gwt, EDF R&D, Clamart
Directeurs	S. COGAN	Chargé de recherche CNRS, HDR, Institut FEMTO-ST, Besançon
	M. OUISSE	Professeur, ENSMM, Besançon
	E. FOLTÊTE	Professeur, ENSMM, Besançon



---

---

# Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mes directeurs de thèse Scott Cogan, Morvan Ouisse et Emmanuel Foltête de m'avoir fait confiance. La patience dont vous avez fait preuve ainsi que la qualité de vos conseils m'ont beaucoup touché et apporté. C'était très agréable de travailler avec vous. Je souhaiterais également vivement remercier Mathieu Corus pour son accompagnement aussi bien moral que technique. Cela a toujours été un réel plaisir d'échanger avec toi, et mon petit doigt me dit que ce n'est pas fini...

J'ai également été extrêmement honoré que Guillaume Puel et François M. Hemez acceptent la lourde tâche de rapporteur en s'intéressant à ces travaux de thèse. Merci à vous. J'en profite également pour remercier sincèrement Etienne Balmès d'avoir accepté la présidence du jury. J'ai particulièrement apprécié les échanges que l'on a eus ensemble lors de la soutenance.

Lorsque l'on débute une thèse, il est impératif de s'appuyer sur les anciens... Je dois remercier plus particulièrement Aurélien Hot et Thomas Weisser pour tous leurs conseils. Mention spéciale à Thomas, avec qui j'ai partagé bien plus que quelques équations. Une thèse serait trop ennuyeuse s'il n'y avait dans son bureau des personnes avec qui échanger. Spéciale dédicace aux membres du 45H : Thierry, Jean, Xavier, Ousseynou, Yanxia, Fabien, Mohamed, Paul, Dimitri et Olivier. Merci à vous d'avoir toujours contribué à la bonne ambiance dans le bureau (et en dehors pour certains !). J'ai également une grande pensée pour l'ensemble des thésards avec qui j'ai eu le plaisir d'échanger, je souhaite notamment une bonne continuation aux plus jeunes.

Je souhaite également remercier les membres du département de mécanique appliquée de femto-st pour la bonne ambiance notamment à midi lorsque nous partagions nos tupp'. Même si j'étais moins présent, je voudrais également remercier les membres du groupe T61/AMA d'EDF R&D.

---

Je tiens ensuite à remercier très chaleureusement les membres de ma famille, notamment mes parents, et mon frère, Thomas, pour leur présence et leur soutien de toujours. Je remercie également Françoise, Pierre, Denise et André d’avoir fait le déplacement le jour de la soutenance. Enfin, un énorme merci à Claire, ma femme, pour la patience et le réconfort quotidien inestimable!...

---

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>v</b>
<b>Table des matières</b>	<b>vii</b>
<b>Liste des figures</b>	<b>xi</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>xv</b>
<b>Liste des notations et abréviations</b>	<b>xvii</b>
<b>1 Introduction générale</b>	<b>1</b>
1.1 Contexte industriel . . . . .	2
1.1.1 Présentation générale des alternateurs . . . . .	2
1.1.2 Origine des vibrations des matériels . . . . .	4
1.1.3 Verrous de modélisation . . . . .	5
1.2 Besoin d'un modèle hybride robuste . . . . .	8
1.2.1 Les différents modèles en dynamique des structures . . . . .	8
1.2.2 Modèle linéaire du second ordre . . . . .	9
1.2.3 Vers un modèle hybride robuste . . . . .	11
1.3 Objectif général et plan du mémoire . . . . .	12
<b>2 Validation de modèle et quantification d'incertitude</b>	<b>15</b>
2.1 Introduction . . . . .	16
2.2 Validation de modèle . . . . .	16
2.2.1 Cadre Vérification et Validation (V&V) . . . . .	16
2.2.2 Calibration de modèle : compromis, paradigme et compensation . . . . .	19
2.3 Quantification d'incertitude . . . . .	19
2.3.1 Classification de l'incertitude : éléments sémantiques . . . . .	19
2.3.2 Méthodes stochastiques . . . . .	21

2.3.3	Méthodes non-stochastiques . . . . .	23
2.3.4	Analyse de robustesse info-gap . . . . .	27
2.4	Bilan . . . . .	33
<b>3</b>	<b>Analyse de robustesse de réponses en dynamique des structures</b>	<b>35</b>
3.1	Introduction . . . . .	36
3.2	Formulation : cadre info-gap . . . . .	37
3.2.1	Formulation . . . . .	37
3.2.2	Discussions . . . . .	41
3.2.3	Calibration des modèles d'incertitude . . . . .	43
3.3	Validation de la méthodologie . . . . .	51
3.3.1	Simulation de la variabilité sur les solutions propres . . . . .	52
3.3.2	Construction et calibration du modèle d'incertitude . . . . .	54
3.3.3	Résultats . . . . .	56
3.4	Application sur des mesures réelles d'alternateur . . . . .	58
3.4.1	Présentation du système . . . . .	58
3.4.2	Résultats . . . . .	60
3.5	Bilan . . . . .	60
<b>4</b>	<b>Expansion modale robuste en présence de méconnaissance</b>	<b>63</b>
4.1	Introduction . . . . .	64
4.2	Expansion de mesures sur un modèle numérique . . . . .	64
4.2.1	Expansion par projection sur une base . . . . .	65
4.2.2	Expansion par vérification des équations d'équilibre . . . . .	66
4.2.3	Expansion par minimisation d'un résidu en énergie . . . . .	68
4.2.4	Bilan . . . . .	69
4.3	Erreur en relation de comportement étendue . . . . .	70
4.3.1	Origine et formulation . . . . .	70
4.3.2	ERCE comme opérateur d'expansion . . . . .	72
4.3.3	Illustrations . . . . .	76
4.3.4	Bilan . . . . .	81
4.4	Expansion modale robuste . . . . .	81
4.4.1	Robustesse, fidélité et dispersion des prédictions . . . . .	82
4.4.2	Formulation . . . . .	83
4.4.3	Application académique . . . . .	85
4.4.4	Application industrielle . . . . .	90
4.5	Bilan . . . . .	98

<b>5</b>	<b>Vers une application industrielle</b>	<b>101</b>
5.1	Introduction . . . . .	102
5.2	Méthodes de réanalyse approchée . . . . .	103
5.2.1	Développement en série de Taylor . . . . .	104
5.2.2	Réanalyse sur base de projection . . . . .	105
5.2.3	Bilan sur l'état de l'art . . . . .	108
5.3	Réanalyse adaptée à l'ERCE . . . . .	109
5.3.1	Stratégie de réduction adaptée à l'ERCE . . . . .	109
5.3.2	Méthodes de réduction adaptées à l'ERCE : illustration . . . . .	110
5.3.3	Bilan . . . . .	114
5.4	Application industrielle . . . . .	114
5.4.1	Description du système et objectifs . . . . .	114
5.4.2	Calculs préliminaires : analyse de sensibilité . . . . .	119
5.4.3	Cas 1 : restriction à deux paramètres pour une prédiction robuste . . . . .	120
5.4.4	Cas 2 : étude à neuf paramètres pour une prédiction robuste . . . . .	130
5.5	Bilan . . . . .	136
<b>6</b>	<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>137</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>141</b>
	<b>Liste des communications</b>	<b>153</b>
	<b>Annexes</b>	<b>155</b>
<b>A</b>	<b>Calcul pratique des courbes de robustesse</b>	<b>155</b>
A.1	Résolution pratique . . . . .	155
A.2	Résolution théorique et pratique : illustration de l'équivalence . . . . .	156
A.3	Calcul des courbes de robustesse dans le chapitre 3 . . . . .	158
<b>B</b>	<b>Identification modale de panneaux solaires</b>	<b>161</b>
B.1	Démarche d'identification . . . . .	161
B.2	Validation de l'identification . . . . .	163
<b>C</b>	<b>Analyse de sensibilité par la méthode de Morris</b>	<b>165</b>

---

---

---

# Liste des figures

1.1	Groupe Turbo-Alternateur en centrale . . . . .	3
1.2	Schéma en coupe d'un alternateur . . . . .	3
1.3	Schéma des efforts en 2 et 4 lobes à un instant $t$ . . . . .	4
1.4	Mise en place d'un essai (gauche : extraction du rotor, droite : vue de l'intérieur du circuit magnétique) . . . . .	7
2.1	Activités V&V formalisées par l'ASME dans [8] . . . . .	17
2.2	Compromis entre fidélité vis-à-vis des données et robustesse vis-à-vis des incertitudes . . . . .	20
2.3	Formes triangulaire et Gaussienne . . . . .	25
2.4	Modèle d'incertitude enveloppe (gauche) et ellipsoïdal (droite) . . . . .	30
2.5	Illustration des étapes successives pour obtenir une courbe de robustesse . . . . .	32
3.1	Poutre encastrée-libre . . . . .	40
3.2	Réponse initiale à l'excitation $F$ sur les 10 ddls . . . . .	40
3.3	Courbe de robustesse . . . . .	42
3.4	Impact du choix de $\mathbf{w}$ sur la courbe de robustesse . . . . .	44
3.5	Système masse-ressort-amortissement à 2 ddls . . . . .	46
3.6	Courbe de robustesse (à gauche) et domaine robuste (à droite) quand $y^c = y_1^c$ . . . . .	48
3.7	Variation observée de $k$ et $m$ . . . . .	49
3.8	Courbe de robustesse et données - $\Gamma_i = \Gamma(\mathbf{u}_i^t, \mathbf{d}^0)$ . . . . .	49
3.9	Robustesse empirique en fonction de $w_1 = \frac{1}{w_2}$ . . . . .	50
3.10	Courbes de robustesse (à gauche) et domaine robuste avec les données (à droite) lorsque $y^c = 0.02m$ . La ligne en trait plein (resp. pointillé) représente le modèle d'incertitude initial (resp. calibré) . . . . .	51
3.11	Montage expérimental . . . . .	52
3.12	Position des capteurs et de l'effort appliqué . . . . .	52



3.13	Variation des 5 premiers modes propres (moyenne (gauche) et écart-type (droite)).	53
3.14	Enveloppe des synthèses de modes normaux normalisée en différents points de la structure . . . . .	55
3.15	Couples $(y_i^t, \Gamma(\mathbf{x}_i^t, \mathbf{d}^0))$ avant calibration . . . . .	56
3.16	Robustesse empirique en fonction de $w_\xi = \frac{1}{w_\phi}$ . . . . .	57
3.17	Courbe de robustesse (zoom sur la figure de droite) . . . . .	58
3.18	Sous-ensemble de modes propres identifiées d'alternateur . . . . .	59
3.19	Maillage expérimental (gauche) et effort appliqué sur le circuit magnétique (vue yz) . . . . .	59
3.20	Réponse fréquentielle . . . . .	60
3.21	Courbe de robustesse . . . . .	60
4.1	Portique 2D et position des capteurs . . . . .	77
4.2	Impact du bruit sur les vecteurs propres d'essais $\phi_v^t$ . . . . .	78
4.3	Erreur d'expansion en fonction du bruit suivant les méthodes d'expansion classique (ED : expansion dynamique et ES : expansion statique) . . . . .	79
4.4	MAC entre les vecteurs propres numériques et expérimentaux . . . . .	80
4.5	Erreur d'expansion en fonction des modes (ED : expansion dynamique et ES : expansion statique) . . . . .	81
4.6	Modèle EF . . . . .	86
4.7	Position des capteurs . . . . .	86
4.8	MAC entre le modèle et les essais . . . . .	87
4.9	Modes propres réels. . . . .	87
4.10	Courbe de robustesse : modèle nominal . . . . .	88
4.11	Courbes de robustesse : investigation . . . . .	88
4.12	Espace de conception et 24 points testés . . . . .	89
4.13	Courbes de robustesse : modèles sélectionnés . . . . .	89
4.14	Variations des paramètres robustes en fonction du niveau d'incertitude . . . . .	89
4.15	Modes propres d'alternateur à étendre . . . . .	91
4.16	Modèle EF d'un alternateur . . . . .	91
4.17	Emplacement des capteurs pour évaluer les erreurs d'expansion . . . . .	92
4.18	Zones de calibration (en rouge) /incertaine (en bleu) . . . . .	92
4.19	Courbes de robustesse correspondant à différents modèles . . . . .	93
4.20	Localisation des termes non-nuls de $\mathbf{A}$ pour différentes tailles de modèles EF ( $N$ petit (resp. grand) à gauche (resp. droite)) . . . . .	95
4.21	Choix de $\kappa$ pour le compromis temps de décomposition / précision . . . . .	97
5.1	Modèle EF du portique . . . . .	110

5.2	Déformées calculées avec le modèle réel et le modèle modifié . . . . .	111
5.3	Performance des méthodes de réduction appliquées à l'ERCE . . . . .	113
5.4	Modèle EF du stator . . . . .	115
5.5	Maillage expérimental . . . . .	115
5.6	Comparaison des vecteurs propres identifiés et calculés après appariage (rouge = numérique et noir = expérimental) . . . . .	116
5.7	Erreur relative en fréquence pour les paires de modes appariés . . . . .	117
5.8	Erreur relative en fréquence par rapport au modèle initial . . . . .	117
5.9	Moyenne vs écart-type . . . . .	120
5.10	Classement des paramètres . . . . .	120
5.11	Surface de réponse obtenue par un modèle polynomial de degré 4 et points de conception utilisés comme base d'apprentissage ( $MSE = 4.10^{-7} \%$ ) . . . . .	123
5.12	Courbes de robustesse . . . . .	124
5.13	Pire cas pour $x$ . . . . .	124
5.14	Erreur de prédiction en fonction de $x$ lorsque $\hat{\alpha} = 0.2$ . . . . .	125
5.15	Erreur de prédiction en fonction de $x$ lorsque $\hat{\alpha} = 0.8$ . . . . .	125
5.16	Évolution de $\hat{\alpha}$ en fonction de $q^R$ . . . . .	127
5.17	Zoom de la figure 5.16 . . . . .	127
5.18	Évolution de $\epsilon^c$ vs $q$ . . . . .	128
5.19	Évolution de $\epsilon^c$ vs $q$ ( $\hat{\alpha} = 0.59$ ) . . . . .	128
5.20	Évolution de $\hat{\alpha}$ en fonction de $q^R$ . . . . .	128
5.21	Choix du modèle robuste ( $\epsilon^c = 0.03$ ) . . . . .	128
5.22	Compromis modèle robuste / modèle optimal . . . . .	129
5.23	Courbes de robustesse . . . . .	133
5.24	Pire cas pour $x_2$ . . . . .	133
5.25	Paramètres robustes en fonction de $\hat{\alpha}$ . . . . .	134
5.26	Courbes de robustesse . . . . .	134
A.1	Confrontation courbes de robustesse théorique / courbes de robustesse obte- nues par optimisation (résolution pratique) . . . . .	157
B.1	FRFs mesurées . . . . .	162
B.2	$\psi_1$ dans le plan de Nyquist . . . . .	162
B.3	Validation de l'identification modale - FRFs mesurées (-), pôles/résidus (- -), modes normaux normalisés (- -). . . . .	163
C.1	Trajectoires associées à la méthode de Morris - tirée de [116] . . . . .	166

---

---

# Liste des tableaux

3.1	Paramètres géométriques et matérielles de la poutre . . . . .	41
3.2	Paramètres du système à 2 ddls . . . . .	47
3.3	Variations sur le taux d'amortissement modal . . . . .	54
3.4	Variation sur les fréquences propres . . . . .	54
4.1	Impact qualitatif (+ (resp. -) = grand (resp. faible) impact sur la qualité du vecteur étendu) de différentes situations suivant les méthodes d'expansion . . . . .	69
4.2	Paramètres géométriques et matériels du portique . . . . .	76
4.3	Distance réel/modèle . . . . .	86
4.4	Sensibilité sur les solutions propres du modèle EF vis-à-vis du module d'Young de l'Isotenax . . . . .	94
5.1	Paramètres variables . . . . .	110
5.2	Paramètres matériaux du stator de moteur électrique . . . . .	116
5.3	Paramétrisation du stator . . . . .	119
5.4	Indicateurs de prédictivité des métamodèles suivant le degré considéré . . . . .	132
5.5	Paramètres de la zone prox permettant une prédiction robuste de la fréquence identifiée du mode 1 vis-à-vis des méconnaissances affectant les modules transverses de la culasse et des dents . . . . .	134
5.6	Tolérances acceptables sur les paramètres incertains en fonction des modèles choisis : modèle nominal, modèles calibrés dans une démarche robuste pour $\epsilon^c = 0.03$ et $\epsilon^c = 0.05$ . . . . .	135

---

---

# Liste des notations et abréviations

## Notations

La liste des notations et abréviations présentée ici n'est pas exhaustive et ne présente que les notations et abréviations les plus couramment utilisées. Pour les notations, on utilise les conventions suivantes :

- les matrices sont notées en majuscule et en gras ;
- les vecteurs sont notés en minuscule et en gras ;
- les scalaires sont notés en minuscule.

$\mathbb{C}$	Ensemble des nombres complexes
$\mathbb{C}^n$	Ensemble des vecteurs complexes de dimension $n$
$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels
$\mathbb{R}^n$	Ensemble des vecteurs réels de dimension $n$
$\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^*$	Ensemble des nombres réels positifs, des nombres réels non-nuls
$\delta_{ij}$	Symbole de Kronecker
$\ \cdot\ _2$	Norme euclidienne
$\ \cdot\ _\infty$	Norme infinie
$\ \cdot\ _{\mathbf{X}}$	Norme euclidienne pondérée par la matrice $\mathbf{X}$
$\mathbf{I}_n$	Matrice identité d'ordre $n$
$\mathbf{X}^T$	Transposée de la matrice $\mathbf{X}$
$(\cdot)^{-1}$	Inverse d'une matrice carrée
$\text{diag}(\cdot)$	Diagonale d'une matrice
$\mathbf{M}$	Matrice de masse
$\mathbf{K}$	Matrice de raideur
$\omega_\nu$	Pulsation propre du mode $\nu$ , liée à la fréquence propre $f_\nu$ par $\omega_\nu = 2\pi f_\nu$
$\boldsymbol{\phi}_\nu$	Déformée propre du mode $\nu$

$\hat{\phi}_v$	Vecteur étendu du mode $v$
$\Lambda, \Phi$	Matrice spectrale, matrice modale
$E, \rho, \nu$	Module d'Young, masse volumique et coefficient de Poisson
$N$	Nombre de degré de liberté du modèle EF
$c$	Nombre de degré de liberté mesurés
$\Pi$	Matrice de passage entre le maillage expérimental et numérique
$\alpha$	Horizon d'incertitude
$\mathcal{U}(\alpha, \mathbf{u}^0)$	Modèle d'incertitude info-gap de centre $\mathbf{u}^0$ et de rayon $\alpha$
$\hat{\alpha}(\mathbf{q}, r_c)$	Fonction robustesse
$(\cdot)^n, (\cdot)^t$	Quantité physique relative au modèle numérique, relative au modèle d'essai

## Abréviations

GTA	Groupe turbo-alternateur
MW	Mégawatt
EF	Éléments finis
CL	Conditions aux limites
V&V	Vérification et Validation
MAC	<i>Modal Assurance Criterion</i>
ddl(s)	Degré(s) de liberté
VA	Variable aléatoire
SEREP	<i>System Equivalent Reduction Expansion Process</i>
ERC	Erreur en relation de comportement
ERCE	Erreur en relation de comportement étendue
ES	Expansion statique
ED	Expansion dynamique
SVD	<i>Singular Value Decomposition</i>

# Introduction générale

## Sommaire

---

<b>1.1 Contexte industriel . . . . .</b>	<b>2</b>
1.1.1 Présentation générale des alternateurs . . . . .	2
1.1.2 Origine des vibrations des matériels . . . . .	4
1.1.3 Verrous de modélisation . . . . .	5
<b>1.2 Besoin d'un modèle hybride robuste . . . . .</b>	<b>8</b>
1.2.1 Les différents modèles en dynamique des structures . . . . .	8
1.2.2 Modèle linéaire du second ordre . . . . .	9
1.2.3 Vers un modèle hybride robuste . . . . .	11
<b>1.3 Objectif général et plan du mémoire . . . . .</b>	<b>12</b>

---



Ces travaux de recherche s'inscrivent dans le cadre d'une collaboration entre le département Analyse Mécanique et Acoustique d'EDF R&D (Clamart) et le département de Mécanique Appliquée de l'institut FEMTO-ST (Besançon) par l'intermédiaire d'un financement CIFRE supporté par l'ANRT. Ces travaux visent à répondre à une problématique formulée par EDF R&D, problématique décrite dans les sections 1.1 et 1.2. Les objectifs et le plan général de ce mémoire seront ensuite annoncés dans la section 1.3.

## 1.1 Contexte industriel

EDF, en tant qu'exploitant de centrale de production électrique, a besoin de comprendre le comportement mécanique des matériels - dont il n'est pas le fabricant - afin d'assurer leur fonctionnement et d'optimiser leurs disponibilités. Les alternateurs, particulièrement ceux des centrales nucléaires, font partie de ces matériels critiques dont EDF a la charge. Certains types d'alternateurs font régulièrement face à des niveaux vibratoires élevés. La solution à ces crises vibratoires passe par la compréhension des phénomènes physiques en jeu, et par la réalisation de modèles permettant d'évaluer les solutions correctrices. La validité des solutions apportées repose cependant fortement sur la représentativité du modèle construit. Or, dans le cas particulier des alternateurs, les processus de construction, encore artisanaux, induisent des variabilités importantes entre les différents matériels d'un même type. Le retour d'expérience montre également que ces matériels sont très sensibles aux conditions d'exploitation, telles que la température, ou le régime de fonctionnement, qui ont à la fois une influence directe sur le chargement, mais aussi sur leur comportement propre.

Les travaux présentés dans ce mémoire ont pour objectif de fournir des éléments de réponse autour de la problématique de la construction de modèles prédictifs pour évaluer le comportement vibratoire en fonctionnement d'alternateurs de centrales de production électrique.

### 1.1.1 Présentation générale des alternateurs

Les alternateurs font partie du GTA (Groupe Turbo-Alternateur, cf. figure 1.1), groupe appartenant au circuit secondaire des centrales de production nucléaire et dont la fonction est de transformer l'énergie mécanique, provenant des turbines, en énergie électrique distribuable sur le réseau.

Les alternateurs sont constitués d'une partie fixe, le stator, et d'une partie tournante, le rotor (cf. figure 1.2). Le stator est constitué d'une carcasse métallique, dans laquelle se trouve le circuit magnétique. Le circuit magnétique est un tube constitué d'un empilage de tôles feuilletées minces, de quelques dixièmes de millimètre d'épaisseur, réalisant un feuilletage



FIG. 1.1: Groupe Turbo-Alternateur en centrale

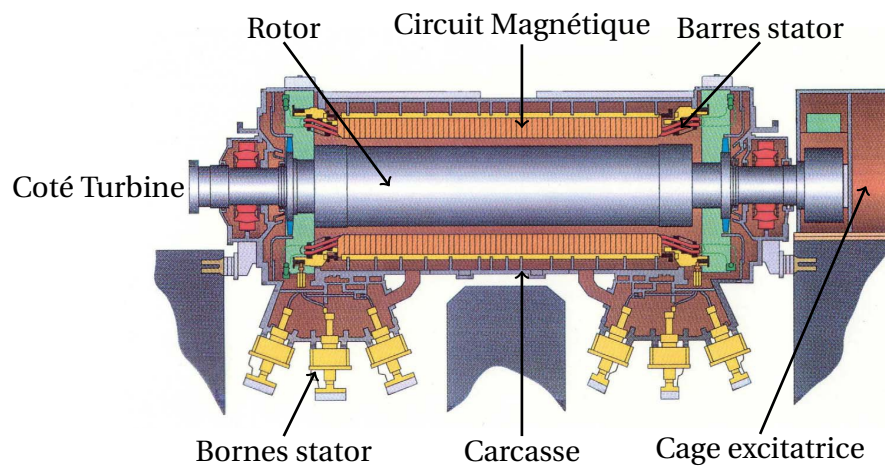


FIG. 1.2: Schéma en coupe d'un alternateur

dans la direction axiale. Des conducteurs creux sont disposés axialement sur la face interne du circuit magnétique à l'intérieur d'encoches réalisées dans les tôles. Le rotor est constitué d'un arbre, sur lequel sont disposés des conducteurs (barres de cuivre). Un dispositif externe (l'excitatrice) vient faire circuler un courant dans les conducteurs du rotor, créant ainsi un champ magnétique. La disposition des barres et la circulation est telle que, pour les alternateurs dont il est question ici, le rotor possède quatre pôles. Pour les machines du parc nucléaire, le rotor, accouplé à l'arbre du GTA, tourne à une fréquence de 25 Hz (soit 1500 tours par minute) lors du régime de fonctionnement. La rotation du rotor entraîne la rotation du champ magnétique, ce qui provoque une force électro-motrice (homogène à une tension) générée par la variation de flux magnétique dans les conducteurs du stator. Lorsque ceux-ci sont connectés à une charge, un courant apparaît. En fonctionnement, en vertu de la présence de quatre pôles et d'une vitesse de rotation de 25 Hz, la tension et le courant produit ont donc une fréquence de 50 Hz.

### 1.1.2 Origine des vibrations des matériels

Ce champ électromagnétique tournant conduit à des efforts entre le rotor et le stator. Ces efforts sont répartis en deux catégories :

- les efforts de Laplace, qui dérivent de la circulation du courant induit dans les conducteurs statoriques soumis à l'effet du champs produit par le rotor ;
- le chargement en pression électromagnétique, qui découle du changement de milieu entre l'entrefer (air) et le stator (tôles feuilletées).

Les formes respectives des courants induits et champs magnétiques inducteurs étant sinusoïdales et quasiment monoharmoniques, les efforts induits sont également quasiment monoharmoniques et sinusoïdaux, de fréquence 100 Hz. La composante principale de l'effort radial, responsable des vibrations, se présente sous la forme d'un champ ovalisé en quatre lobes, tournant à 100 Hz. Cette forme est présentée sur la partie droite de la figure 1.3.

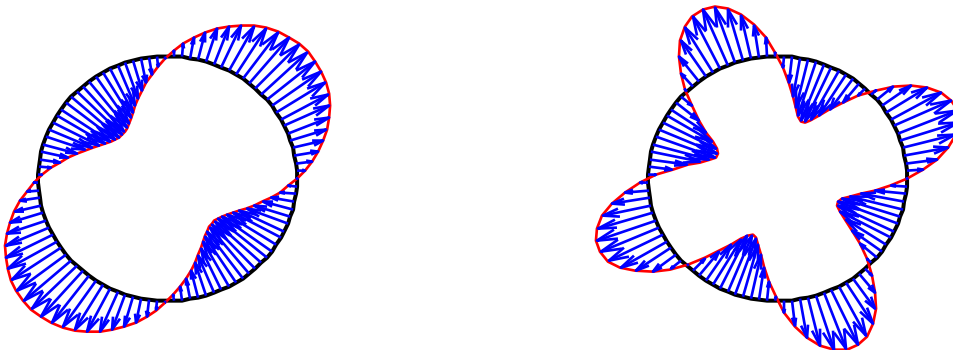


FIG. 1.3: Schéma des efforts en 2 et 4 lobes à un instant  $t$

D'une manière générale, les constructeurs savent dimensionner correctement les matériels pour limiter les problèmes d'origine vibratoire. Or, dans le cas particulier des alternateurs des tranches 900 MW, un choix audacieux de conception s'est avéré, suite à la mise en service, provoquer des problèmes vibratoires. Les niveaux vibratoires anormalement élevés sur ces matériels sont imputables à la conjonction de deux phénomènes [10] :

- Le premier phénomène dérive du choix de conception, devant permettre d'améliorer le rendement et la capacité de production des générateurs. Cette conception induit l'existence d'une composante d'effort présentant une forme ovalisée en deux lobes, tournant à 100 Hz. Cette forme est présentée sur la partie gauche de la figure 1.3. Ces forces dépendent du courant d'excitation et de la charge appliquée à la machine.
- Le second phénomène est l'existence de modes, autour de 100 Hz, dont les formes coïncident avec des ovalisations en deux lobes. La densité modale peut être importante, jusqu'à un mode tous les Hz sur certains matériels et avec présence de modes quasiment doubles.

La conjonction de ces deux phénomènes est spécifique à la technologie des alternateurs du parc 900 MW, et peut conduire à des dégradations, d'une part, sur des éléments du stator et, d'autre part, sur des éléments périphériques par transmission des vibrations. En termes de proportions, la contribution de l'effort en 4 lobes est nettement prépondérante devant la contribution de l'effort en 2 lobes dans l'effort total (de l'ordre d'un facteur 100 pour le champ de pression radial) mais l'appropriation spatiale entre les modes autour de 100 Hz et le champs d'effort en 2 lobes conduit à des phénomènes d'amplification dynamique [43]. La présence de niveaux vibratoires élevés sur le stator de l'alternateur entraîne principalement des restrictions d'utilisation, mais peut également se traduire par l'apparition d'avar-ies. Dans les deux cas, l'indisponibilité des matériels entraîne des pertes financières importantes pour EDF.

Dans le cas des alternateurs, qui ont un fort impact sur le taux d'indisponibilité des centrales, la solution curative consiste à venir placer des dispositifs adaptés sur la carcasse. Ces dispositifs sont des absorbeurs dynamiques et sont basés sur les principes du résonateur de Helmholtz. Ils doivent être réglés au cas par cas, sur chacune des machines. Par ailleurs, les comportements des matériels n'étant pas stables vis à vis de la température et des conditions d'exploitation, cette solution n'est pas toujours efficace. Les autres actions consistent à intervenir directement sur le matériel, pendant les phases d'arrêt. En plus des opérations de maintenance classiques, le constructeur propose des solutions et en évalue les impacts. Actuellement, EDF ne dispose pas des moyens nécessaires pour la réalisation de contre calculs afin de valider ou non les modifications proposées. Les solutions préconisées et installées ne s'avérant pas toujours efficaces, EDF souhaite donc se doter d'outils numériques et expérimentaux permettant d'anticiper la survenue de ces problèmes avant le redémarrage de la machine.

### 1.1.3 Verrous de modélisation

Lors de l'assemblage du circuit magnétique, de fines tôles, représentant une portion de disque, sont empilées par paquets de 10 cm environ, espacés d'intercalaire devant permettre le passage d'un fluide pour le refroidissement. Le circuit magnétique est alors disposé entre deux larges plateaux de serrages, et l'ensemble est ensuite solidarisé par des tirants traversants afin d'assurer un comportement globalement monolithique. Ce serrage est effectué de manière irréversible puisque les goujons sont soudés une fois le circuit magnétique pré-contraint. Des barres conductrices, constituées d'un assemblage de tubes creux enchevêtrés, noyés dans différents isolants, sont ensuite logées dans les ouvertures axiales ménagées dans les tôles du circuit magnétiques. Les barres conductrices sont maintenues dans le circuit magnétique par plusieurs jeux de cales. Aux deux extrémités du circuit magnétique, plusieurs

dispositifs de supportages permettent de maintenir les parties courbes des barres conductrices. Ces assemblages, appelées cages de développantes, font aussi l'objet de calage avec des matériaux variés (feutre, résines, fibres, etc.) pour solidariser les différents composants. Une part importante de la dispersion de comportement des matériels provient de ces opérations d'assemblage, réalisées de façon artisanale. Ce matériel présente un aspect composite important, à la fois pour l'assemblage complet, mais aussi à l'échelle d'un nombre de composants important (circuit magnétiques, barres, cages de développantes), ce qui complique notablement la tâche de modélisation. Enfin, EDF ne dispose pas des plans détaillés des matériels, et certains dispositifs sont donc modélisés de façon approximative, et les hypothèses réalisées dérivent essentiellement du « dire d'expert ». L'ensemble de ces éléments illustre les grandes difficultés rencontrées pour la réalisation de modèles prédictifs.

Pour surmonter cet obstacle, EDF réalise des campagnes d'essais sur les matériels devant faire l'objet d'opérations de maintenance ou de modifications. Le comportement dynamique est alors évalué par l'identification de solutions propres, obtenues suite à des campagnes d'analyses modales expérimentales. Ces analyses modales sont réalisées lorsque l'alternateur est à l'arrêt. Le rotor est alors retiré de l'alternateur (cf. figure 1.4), on vient ensuite positionner des accéléromètres à l'intérieur du circuit magnétique et l'excitation est appliquée à l'extérieur de la carcasse au moyen d'un marteau de choc.

Un modèle numérique générique, représentant le comportement moyen issu des essais réalisés sur les différents sites et matériels, a été construit par EDF. Ce modèle est actuellement utilisé pour estimer les niveaux de réponse en fonctionnement, mais l'absence de représentativité spécifique ne permet pas d'accorder suffisamment de confiance aux résultats pour valider les opérations réalisées par le constructeur. Par ailleurs, le comportement dynamique est évalué lorsque la machine est à l'arrêt mais il est évident que, lors du fonctionnement, ce comportement dynamique change, sous l'effet de plusieurs phénomènes dont :

- l'effet de la température. En fonctionnement, la température interne de la génératrice peut atteindre 70°C. Beaucoup de matériaux utilisés (résines, isolants, peinture, etc.) voient leur propriétés modifiées entre 20°C et 70°C. On dispose, pour certains matériaux, des courbes d'évolutions des propriétés. En revanche, la plupart fait partie du savoir faire du constructeur, et ces données ne sont pas accessibles pour EDF ;
- l'effet de précontrainte liée à la composante constante de pression électromagnétique, essentiellement. Le champ de pression électromagnétique, évoqué à la section 1.1.2, possède une composante continue importante (de l'ordre de 10 MPa). Ce chargement a vraisemblablement une influence significative sur le comportement d'éléments tels que le circuit magnétiques, en particulier par des phénomènes de comblement de jeux.



## 1. Introduction générale

---

D'une manière générale, il est admis, sur la base du retour d'expérience, que les fréquences propres autour de 100 Hz peuvent fluctuer de 3% à 7%, sans que l'on dispose d'information sur d'éventuels croisements de modes. Aucune information n'est disponible à l'heure actuelle auprès des constructeurs et il semble dès lors qu'il n'existe pas de modèle permettant de prédire précisément la variation du comportement dynamique entre le moment où l'alternateur est à l'arrêt et le moment où il est en fonctionnement. Le comportement particulier du circuit magnétique, en particulier son empilage de tôle, fait d'ailleurs toujours l'objet de recherche active autour de sa modélisation [41, 42, 92].

Il apparaît donc que cette démarche ne permet pas, durant le temps très limité d'arrêt de tranche, d'indiquer avant redémarrage si l'alternateur sera sujet à de forts niveaux vibratoires. Actuellement, l'autorisation de redémarrage est principalement basée sur le jugement d'expert, suite à la réalisation d'essais à l'arrêt, et donc sans connaissance précise des effets de température et de précontrainte<sup>1</sup>.

Après avoir rappelé le cadre de construction des différents modèles en dynamique des structures, on explique, dans la section 1.2, pourquoi la construction d'un modèle hybride robuste convient bien à la problématique décrite ci-dessus.



FIG. 1.4: Mise en place d'un essai (gauche : extraction du rotor, droite : vue de l'intérieur du circuit magnétique)

---

1. Ces derniers effets ne sont, actuellement, pas pris en compte dans la modélisation EF car ils ne sont pas connus.

## 1.2 Besoin d'un modèle hybride robuste

### 1.2.1 Les différents modèles en dynamique des structures

Lorsque l'on cherche à appréhender et prédire le comportement dynamique d'une structure, on construit des modèles. Plus précisément, il est possible de distinguer trois types de modèle en dynamique des structures.

Le modèle expérimental intègre le comportement dynamique mesuré et dérive de l'identification du spectre, ou modèle modal, de la structure [45]. On connaît alors l'ensemble des solutions propres de la structure, sur une bande de fréquence donnée et sur un nombre réduit de capteurs. Bien que la discrétisation grossière empêche de connaître précisément le déplacement en tous points de la structure, sur une large bande de fréquence, on considère généralement le modèle expérimental comme étant le modèle de référence. Plus de détails seront fournis dans le chapitre 3.

Pour améliorer la connaissance du comportement dynamique en tous points géométriques et/ou fréquentiels et à des chargements particuliers, on construit des modèles numériques, souvent élaborés par la méthode des éléments-finis (EF) [155]. Le modèle numérique est une approximation du modèle continu, non utilisé lorsque l'on étudie des structures pour lesquelles des solutions analytiques aux équations aux dérivées partielles sont impossible à obtenir. On évalue la qualité, ou la capacité de prédiction, des modèles numériques par une distance entre les sorties du modèle numérique et les sorties du modèle expérimental: on parle de distance calcul/essai, la norme pour évaluer cette distance dépend du type de réponse analysée. Lorsque la qualité n'est pas satisfaisante, on reconsidère certaines hypothèses faites lors de la construction du modèle numérique dans l'objectif de réduire cette distance. Cette phase, généralement fastidieuse pour des structures industrielles, est qualifiée de calibration de modèle. Plus de détails seront fournis dans les chapitres 2 et 4.

Le modèle hybride combine les modèles expérimentaux et numériques. On intègre les données identifiées expérimentalement directement dans le modèle numérique au lieu de chercher à considérer les deux modèles séparément. Un opérateur d'expansion doit alors être construit introduisant une approximation supplémentaire. Plus précisément, on va chercher à étendre les solutions propres identifiées expérimentalement sur le modèle numérique. Dans ce mémoire, lorsque l'on parlera de modèle hybride, cela signifiera qu'une expansion de données expérimentales sur un modèle numérique aura été réalisée. Cette étape permet de relâcher la phase de calibration de modèle et nécessite de s'assurer que le modèle EF possède globalement les bonnes propriétés d'inertie et de raideur. Plus de détails seront fournis

dans le chapitre 4.

Le terme robuste, bien que plus précisément défini dans la suite du mémoire, indique une aptitude à résister à des approximations ou à des zones d'ignorance afin de se protéger d'impacts pouvant dégrader des propriétés à préserver [126]. Ce terme est couramment employé pour qualifier des décisions : une décision robuste est une décision qui ne change pas en présence d'incertitude. Cependant, tout au long de ce mémoire, on parlera de « modèle robuste » : un modèle robuste est un modèle dont les prédictions prennent en compte l'application et satisfont un niveau de performance donné en présence d'incertitude. Cette formulation suggère que la construction d'un modèle robuste passe par la définition de l'application associée au modèle, c'est à dire que l'on doit être capable de répondre à la question suivante : quelle décision veut-on prendre avec le modèle ? Ceci permet de connaître le type de réponse que le modèle doit être capable de prédire ainsi que le niveau de fidélité que l'on cherche à obtenir. Le niveau de robustesse est lié au niveau d'incertitude que le modèle est capable de tolérer sans changer de décision : plus le modèle peut tolérer d'incertitude, plus il sera considéré comme robuste. Évidemment, un modèle purement robuste est quasiment impossible à retrouver, notamment sur des structures industrielles où de nombreuses hypothèses sont formulées. Bien que le terme robuste sera défini dans le chapitre 2, on trouvera plus de détail sur la notion de modèle robuste dans les chapitres 4 et 5.

### 1.2.2 Modèle linéaire du second ordre

Afin de fixer les notations, on rappelle la formulation du modèle linéaire du second ordre régissant le comportement mécanique de la plupart des systèmes en dynamique des structures. On pourra se référer à un ouvrage de référence (par exemple [53]) pour plus de détails.

Dans ce mémoire, nous étudierons le comportement dynamique de systèmes mécaniques que l'on supposera linéaire. La discrétisation du principe des travaux virtuels par la méthode des éléments-finis en  $N$  degrés de liberté (ddls) conduit au système différentiel du second ordre suivant régissant le mouvement d'un système dans le domaine temporel :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{y}(t) = \mathbf{f}(t). \quad (1.1)$$

Les matrices de masse  $\mathbf{M}$ , d'amortissement  $\mathbf{C}$  et de raideur  $\mathbf{K}$  sont carrées, d'ordre  $N$ , symétriques et à valeurs réelles. De plus, la matrice de masse est supposée définie positive et les matrices d'amortissement<sup>2</sup> et de raideur définies non-négatives. Les vecteurs  $\mathbf{y}(t)$ ,  $\dot{\mathbf{y}}(t)$

---

2. Un amortissement visqueux est généralement considéré dans le cas des alternateurs : les taux d'amortissement modaux identifiés lors d'essais sont utilisés car ces derniers représentent la connaissance la plus fiable sur l'amortissement.



et  $\ddot{\mathbf{y}}(t) \in \mathbb{R}^N$  représentent respectivement les vecteurs déplacement, vitesse et accélération associés aux ddls du modèle EF tandis que le vecteur  $\mathbf{f}(t) \in \mathbb{R}^N$  représente les sollicitations extérieures appliquées au système.

En régime stationnaire et sous l'hypothèse d'un comportement linéaire, l'équation du mouvement (1.1) est traitée dans le domaine fréquentiel pour une bande fréquentielle d'intérêt  $\Omega = [\omega_1; \omega_2]$ . On pose  $\mathbf{y}(t) = \hat{\mathbf{y}}(\omega)e^{j\omega t}$  et  $\mathbf{f}(t) = \hat{\mathbf{f}}(\omega)e^{j\omega t}$  (avec  $j^2 = -1$ ), l'équation (1.1) devient alors

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + j\omega \mathbf{C} + \mathbf{K}) \hat{\mathbf{y}}(\omega) = \hat{\mathbf{f}}(\omega). \quad (1.2)$$

Calculer la réponse forcée de la structure, en régime stationnaire, consiste à déterminer  $\hat{\mathbf{y}}(\omega)$ ,  $\forall \omega \in \Omega$ . On peut alors directement inverser la matrice  $(-\omega^2 \mathbf{M} + j\omega \mathbf{C} + \mathbf{K})$ , c'est l'approche directe et exacte mais l'inversion,  $\forall \omega \in \Omega$ , peut se révéler très coûteuse. Dans le cas général, on préfère décomposer la réponse à l'aide des solutions propres du système conservatif associé, c'est à dire avec  $\mathbf{C} = \mathbf{0}$ .

Une analyse modale est donc réalisée dans le but d'extraire le spectre de la structure c'est à dire que l'on cherche les  $N$  couples  $(\omega_v, \phi_v)$ , avec  $v \in \{1, \dots, N\}$ , solutions du problème aux valeurs propres généralisé.

$$(\mathbf{K} - \omega_v^2 \mathbf{M}) \phi_v = \mathbf{0}. \quad (1.3)$$

Les valeurs propres sont regroupées dans la matrice spectrale  $\Lambda = \text{diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_N^2) \in \mathbb{R}^{N \times N}$  tandis que les vecteurs propres sont ordonnés dans la matrice modale  $\Phi = [\phi_1, \dots, \phi_N] \in \mathbb{R}^{N \times N}$ . Numériquement, il existe de nombreux algorithmes permettant de résoudre le problème aux valeurs propres (1.3) : on citera, sans être exhaustif, l'algorithme de Lanczos [81], la méthode IRA (*Implicit Restart Arnoldi*) [137], la méthode de Bathe-Wilson [19], etc. Les vecteurs propres vérifient les relations d'orthogonalité. Soit  $(i, j) \in \{1, \dots, N\}^2$  et  $\delta_{ij}$ , le symbole de Kronecker, on a

$$\begin{aligned} \phi_i^T \mathbf{M} \phi_j &= \mu_i \delta_{ij}, \\ \phi_i^T \mathbf{K} \phi_j &= \mu_i \omega_i^2 \delta_{ij}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Les vecteurs propres étant déterminés à un facteur près, ils sont généralement normés par rapport à la matrice de masse :  $\mu_i = 1$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, N\}$ . Il est possible de montrer que la matrice modale normée constitue une base complète de  $\mathbb{R}^N$ . Ainsi, tout vecteur de  $\mathbb{R}^N$  peut être décomposé de manière unique sur la base modale :

$$\hat{\mathbf{y}} = \sum_{v=1}^N q_v \phi_v = \Phi \mathbf{q}. \quad (1.5)$$

Le vecteur des coordonnées  $\mathbf{q}$  dans la base modale est le vecteur des coordonnées généralisées (tandis que le vecteur solution  $\hat{\mathbf{y}}$  regroupe les coordonnées physiques). Introduisant

cette décomposition dans l'équation du mouvement (1.2) prémultipliée par  $\Phi^T$ , la réponse du système s'écrit

$$\hat{\mathbf{y}} = \Phi (\Lambda + j\omega \mathbf{D} - \omega^2 \mathbf{I}_N)^{-1} \Phi^T \hat{\mathbf{f}}. \quad (1.6)$$

Lorsque l'on considère l'hypothèse de Basile comme étant valide (ie la matrice modale  $\Phi$  diagonalise la matrice d'amortissement  $\mathbf{C}$  en une matrice  $\mathbf{D}$ ), la réponse du système est découplée. En pratique, seul un nombre réduit de modes propres est extrait,  $m \ll N$ , car nous nous intéressons généralement au comportement basses fréquences de la structure, domaine où les premiers modes propres gouvernent le comportement dynamique de la réponse, et, d'autre part, le coût numérique d'extraction de la base modale complète est élevé. Ainsi,  $\Lambda \in \mathbb{R}^{m,m}$  et  $\Phi \in \mathbb{R}^{N,m}$ . La construction d'une telle sous-base est qualifiée de troncature modale. Cette approximation induit notamment des erreurs aux très basses fréquences et aux anti-résonances. Pour minimiser cette erreur, on applique une correction, dite correction statique, qui est la réponse statique résiduelle :

$$\mathbf{y}_{\text{corr}} = \mathbf{R} \hat{\mathbf{f}}, \quad (1.7)$$

avec  $\mathbf{R}$  la matrice de flexibilité statique résiduelle calculés à l'aide des modes retenus :

$$\mathbf{R} = \mathbf{K}^{-1} - \Phi \Lambda^{-1} \Phi^T. \quad (1.8)$$

L'utilisation de ces termes de flexibilité résiduelle est en général préférée à l'utilisation d'une base modale étendue pour le calcul de réponse.

### 1.2.3 Vers un modèle hybride robuste

L'utilisation d'un modèle hybride est adaptée à la problématique industrielle abordée dans ce mémoire. L'information mécanique contenue dans le modèle hybride repose sur le comportement dynamique identifié, ce qui constitue, pour le cas des alternateurs, l'information la plus fiable. On ne peut clairement pas se reposer uniquement sur le modèle EF, qui est loin d'être fiable dans la prédiction des solutions propres. Une étude de faisabilité a souligné la capacité d'un modèle hybride à retrouver les niveaux de réponse en fonctionnement mesurés en production [153].

Comme nous pourrons le voir dans la section 4.2, il existe une littérature abondante sur les méthodes d'expansion dont l'objectif est d'obtenir un vecteur étendu<sup>3</sup>  $\hat{\phi}_v$  du mode  $v$ , composé de données expérimentales reconstruites sur un modèle numérique. Ces vecteurs sont regroupés dans la matrice des vecteurs étendus  $\hat{\Phi}$ . On dispose également d'un modèle

---

3. On parlera également de mode étendu, ce qui est un abus de langage, puisque les modes étendus que nous utiliserons ne résultent pas d'un problème aux valeurs propres généralisé.

numérique de l'effort électromagnétique : ce modèle numérique a été construit dans un code électromagnétique et des méthodes de projection du champ électromagnétique sur le maillage EF ont été développées [70]. Finalement, l'effort électromagnétique, noté<sup>4</sup>  $\mathbf{f}$ , est de dimension  $N$ , le nombre de ddls constituant le modèle numérique.

Puisque l'on disposera de vecteurs étendus, l'équation du mouvement (1.2) ne sera pas traitée dans l'espace complet du modèle EF mais dans l'espace généré par les modes propres identifiés (1.5). Soient  $(\omega_v^t, \xi_v^t)$  respectivement la pulsation propre et l'amortissement modal identifié du mode  $v$ , avec  $v \in \{1, \dots, m\}$  et  $m$  le nombre de modes identifiés, on définit la matrice spectrale  $\Lambda^t \in \mathbb{R}^{m,m}$  constituée des pulsations propres au carrée sur sa diagonale et  $\mathbf{D}^t \in \mathbb{R}^{m,m}$  la matrice des amortissements modaux. On va donc chercher à estimer le déplacement  $\mathbf{q}$  à la fréquence de fonctionnement  $\omega_0$  au chargement électromagnétique  $\mathbf{f}$  par projection sur le modèle modal :

$$\mathbf{q}(\omega = \omega_0) = \hat{\Phi} (\Lambda^t + j\omega \mathbf{D}^t - \omega^2 \mathbf{I}_N)^{-1} \hat{\Phi}^T \mathbf{f} \in \mathbb{C}^N. \quad (1.9)$$

### 1.3 Objectif général et plan du mémoire

À la suite de la problématique industrielle exposée dans la section 1.1 et des définitions apportées dans la section 1.2, l'objectif de ces travaux de recherche formulé par EDF R&D est le suivant : **proposer des outils d'aide à la décision afin de faciliter la prise de décision rapide (arrêt pour réparation) suite au redémarrage d'alternateurs.**

Afin de répondre à cet objectif, le mémoire est organisé de la manière suivante :

- **Le chapitre 2** vise à fournir le cadre scientifique dans lequel s'inscrit cette thèse. Des éléments de validation de modèle, directement empruntés au cadre de la V&V (Vérification et Validation), seront notamment apportés. À l'issue de cette partie, on comprendra l'importance de prendre en compte l'incertitude dans la construction des modèles. Dans la littérature, on distingue aléa et méconnaissance : on précisera cette distinction. La prise en compte de l'incertitude dans les modèles est possible par la construction de modèles théoriques qui permettent d'idéaliser l'incertitude. On distingue les méthodes stochastiques, exploitant l'information par une vision probabiliste, et non-stochastiques, utilisant d'autres théories pour exploiter l'information. On détaillera ces méthodes dans l'objectif de souligner le cadre intéressant fourni par la

---

4. Dans la suite et dans un souci de clarté, la notation en chapeau (cf. section 1.2.2) indiquant que l'effort appartient au domaine fréquentiel est omise :  $\mathbf{f}$  est l'effort extérieur appliqué au système dans le domaine fréquentiel.

théorie info-gap, précisément détaillée à la fin du chapitre et largement exploitée tout au long de cette thèse ;

- **Le chapitre 3** propose un outil d'aide à la décision pour évaluer la robustesse de réponses dynamiques vis-à-vis d'un modèle modal incertain. Cet outil d'aide à la décision est construit à l'aide du cadre proposé par la théorie info-gap et permet de répondre à la problématique de l'impact des méconnaissances de l'évolution des solutions propres lors de la remise en route des alternateurs. On verra comment le modèle d'incertitude info-gap permet de prendre en compte de l'information nouvelle, comme l'ajout de nouvelles bases modales expérimentales dans le modèle, sans faire l'hypothèse d'une loi de probabilité ;
- **Le chapitre 4** propose une démarche de calibration robuste tenant compte des spécificités du modèle hybride. Après un état de l'art sur les méthodes d'expansion, on montrera que les méthodes basées sur la minimisation de l'erreur en relation de comportement étendue sont bien adaptées à la problématique abordée dans la thèse. On fournira notamment un exemple de construction de modèle hybride robuste sur un modèle EF de stator d'alternateur ;
- **Le chapitre 5** propose quelques exemples d'applications. La construction d'un modèle hybride robuste exige la résolution de plusieurs systèmes linéaires à l'intérieur d'une boucle d'optimisation, ce qui rend l'approche difficile à implémenter pour des modèles numériques dépassant le million de degrés de liberté. On étudiera donc le potentiel de méthodes de réanalyse permettant l'obtention rapide et fiable du modèle hybride robuste. Les métamodèles constituent une autre approche classique pour évaluer la robustesse d'un modèle : on calibrera, dans une démarche robuste, un modèle représentant un stator de moteur électrique vis-à-vis de données d'essais en s'appuyant sur les métamodèles. Cette calibration, originale, permettra notamment d'illustrer l'existence des compromis entre fidélité vis-à-vis des données et robustesse vis-à-vis des incertitudes.

Enfin, une conclusion fournit le bilan de ces travaux de recherche et des perspectives seront alors proposées pour de futurs travaux.

---

# Validation de modèle et quantification d'incertitude

## Sommaire

---

<b>2.1 Introduction</b>	<b>16</b>
<b>2.2 Validation de modèle</b>	<b>16</b>
2.2.1 Cadre Vérification et Validation (V&V)	16
2.2.2 Calibration de modèle : compromis, paradigme et compensation	19
<b>2.3 Quantification d'incertitude</b>	<b>19</b>
2.3.1 Classification de l'incertitude : éléments sémantiques	19
2.3.2 Méthodes stochastiques	21
2.3.3 Méthodes non-stochastiques	23
2.3.4 Analyse de robustesse info-gap	27
<b>2.4 Bilan</b>	<b>33</b>

---

## 2.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de présenter les domaines scientifiques auxquels se rapportent ces travaux de recherche. On commencera par décrire le cadre très général proposé par les méthodes de Vérification et Validation (V&V) pour ensuite décrire les différents modèles théoriques actuellement utilisés pour prendre en compte l'incertitude dans la construction des modèles.

## 2.2 Validation de modèle

### 2.2.1 Cadre Vérification et Validation (V&V)

Les relations entre les activités expérimentales et numériques sont en train d'évoluer. Autrefois, les essais expérimentaux étaient conçus et réalisés dans l'objectif de qualifier un système tandis que la simulation numérique était utilisée pour comprendre *a posteriori* les phénomènes physiques en jeu dans le système. Les deux activités pouvaient évoluer de manière quasi-indépendante. Un nouveau paradigme est désormais en train de se mettre en place : la simulation est utilisée pour prédire la réponse du système avec une confiance quantifiable tandis que les essais explorent son comportement mécanique et valident les prédictions issues de la simulation. La simulation numérique a donc désormais pris, et va continuer à prendre, une place prépondérante dans les activités industrielles pour certifier le comportement mécanique d'un système. D'après [104], la simulation est l'application d'un modèle. Mais qu'est-ce qu'un modèle ? Toujours d'après [104], un modèle est une représentation simplifiée d'un système destinée à améliorer notre capacité à comprendre, prédire et éventuellement contrôler son comportement. Dans le cadre de la dynamique des structures, la construction des modèles est basée sur des lois mécaniques - comme la loi de comportement d'un matériau - et des lois mathématiques empruntées généralement au domaine de l'analyse et de l'algèbre linéaire.

L'objectif ultime de la simulation numérique de phénomènes physiques est de prédire la réponse à un environnement qui n'est pas reproduit expérimentalement. Cependant, l'utilisation d'un modèle, même très raffiné (ou détaillé), ne garantit pas un résultat crédible. En effet, la confrontation entre un modèle et l'expérience démontre souvent l'incapacité du modèle à prédire la réponse de manière fiable. De ce constat est apparu le besoin de développer une méthodologie permettant de démontrer la crédibilité d'une simulation : les méthodes de Vérification et Validation (V&V). Historiquement, ces méthodes sont apparues à la fin des années 90 lorsqu'il a fallu démontrer la crédibilité des simulations portant sur l'arme nucléaire aux États-Unis tout en s'affranchissant des essais nucléaires.

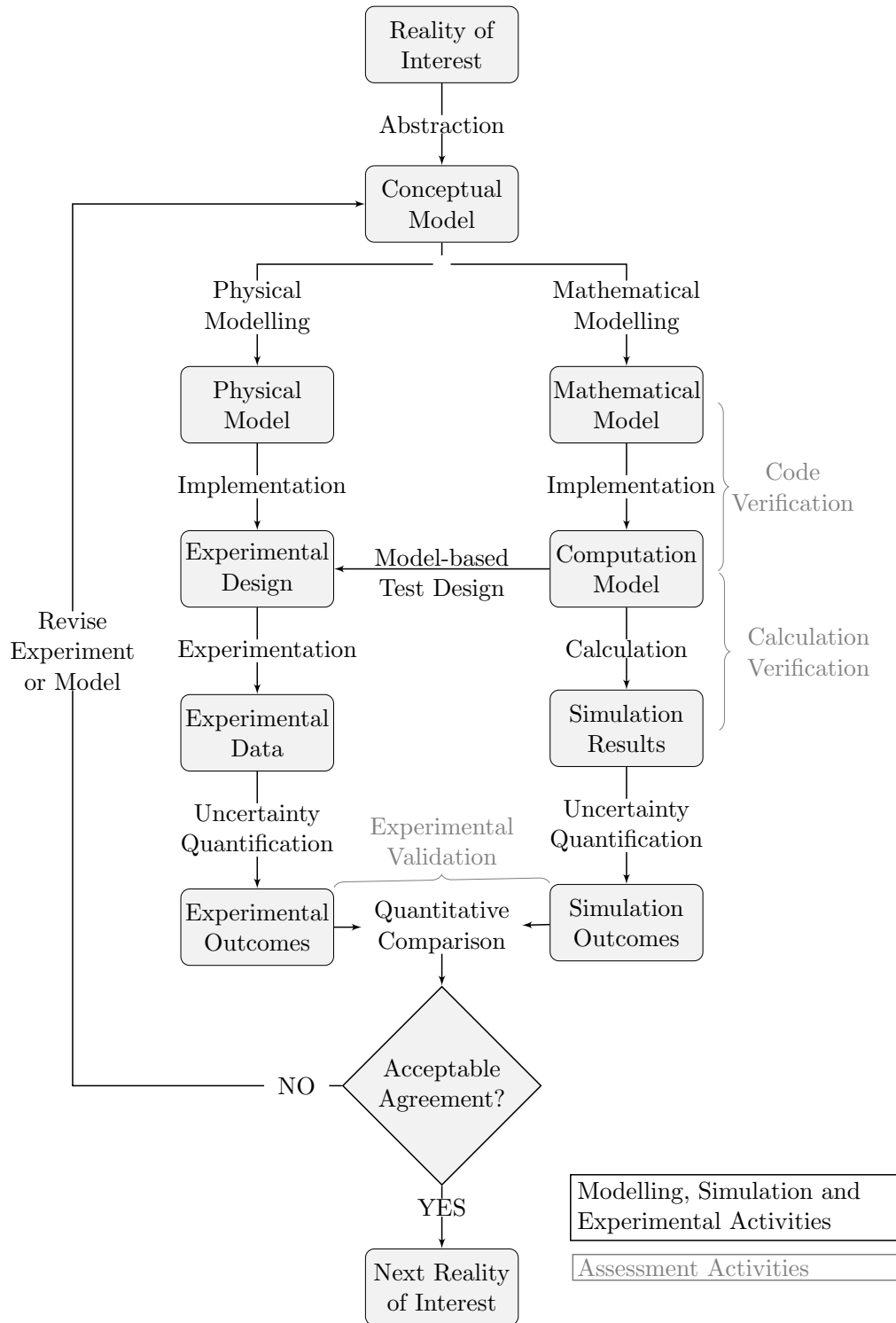


FIG. 2.1: Activités V&V formalisées par l'ASME dans [8]



Le cadre V&V est présenté dans deux documents rédigés par l'AIAA (*American Institute of Aeronautics and Astronautics*) [4] et l'ASME (*American Society of Mechanical Engineers*) [8]. On citera également les livre de Roache [123] et Oberkampf et Roy [106] comme étant des ouvrages de référence. Il est important de noter que le cadre défini par ces références est principalement abordé sous l'angle mécanique des fluides et traite principalement des aspects de vérification. Les principales références traitant de V&V appliquées à la dynamique des structures sont par exemple [58, 59, 142]. Les méthodes V&V évaluent la crédibilité d'un modèle numérique donné dans le but de fournir un niveau de confiance dans les décisions prises à l'aide de ce modèle et suivant son utilisation. L'objectif de ces méthodes est donc de fixer un cadre visant à établir la crédibilité des modèles. Dans ce cadre très général et comme indiqué sur la figure 2.1, on distingue naturellement deux activités.

La vérification est le processus déterminant que l'implémentation d'un modèle représente fidèlement sa description conceptuelle ainsi que sa solution [4]. Elle implique notamment de s'assurer que le modèle résout bien les équations. On distinguera donc naturellement les activités de vérification du code (les algorithmes utilisés par le modèle sont-ils bien implémentés ?) des activités de vérification de la solution (la solution du modèle converge-t-elle vers la vraie solution ?).

La validation est le processus déterminant dans quelle mesure le modèle est une représentation fidèle de la réalité du point de vue de l'utilisation prévue [4]. Elle implique de s'assurer que le modèle résout les bonnes équations. Par définition, la validation fait intervenir le dialogue calcul/essai, contrairement à la vérification. Les expériences formant la base de la validation expérimentale doivent être d'ailleurs conçues, conduites et analysées avec l'objectif primordial de déterminer quantitativement la capacité du modèle à simuler un processus physique donné [107]. La calibration de modèle, bien que non triviale, n'est qu'une partie de la validation de modèle. En théorie, on doit s'assurer que les prédictions du modèle sont faiblement influencées par les hypothèses formulées lors de la construction du modèle. On doit donc quantifier et prendre en compte l'incertitude lors de la construction du modèle afin de le valider. C'est la phase de quantification d'incertitude.

À titre d'exemple, on pourra trouver dans [95, 145, 144] une démarche complète de V&V appliquée au dimensionnement de pales d'éoliennes. Pour résumer, on citera Roache [123] «*la vérification s'occupe des mathématiques, la validation s'occupe de la physique* ».

### 2.2.2 Calibration de modèle : compromis, paradigme et compensation

La calibration de modèle consiste à modifier les paramètres du modèle EF dans l'objectif d'améliorer sa capacité de prédiction [64]. Il existe plusieurs visions pour traduire mathématiquement la notion de capacité de prédiction. L'approche historique et la plus classique est d'interpréter la capacité de prédiction en terme de fidélité vis-à-vis des données [100] : un modèle est dit prédictif s'il est capable de prédire des données expérimentales avec un niveau de fidélité acceptable. Plusieurs métriques peuvent être utilisées pour évaluer la distance entre les prédictions du modèles et les données observées : dépendant du type de données que le modèle cherche à prédire, on pourra par exemple utiliser une simple distance Euclidienne - pour évaluer la distance entre les deux points -, ou les distances de Mahalanobis [84] ou Bhattacharyya [26] - pour évaluer la distance entre deux distributions.

Une autre vision [24], plus récente, permet d'interpréter la capacité de prédiction comme la capacité à satisfaire trois critères : outre la fidélité vis-à-vis des données, la robustesse vis-à-vis des incertitudes et la dispersion des prédictions. Malheureusement, il a également été montré que ces trois objectifs étaient antagonistes. Plus spécifiquement, il a été montré dans [24] que la fidélité vis-à-vis des données et la robustesse vis-à-vis des incertitudes était antagonistes : lors de la calibration de modèle, on ne peut pas améliorer à la fois la fidélité vis-à-vis des données d'essais et à la fois la robustesse vis-à-vis des paramètres incertains, ce qui est illustré sur la figure 2.2. Certains auteurs ont enfin proposé récemment une métrique [11, 60] permettant d'établir la capacité de prédiction d'un modèle basée sur ces critères. Ce compromis est formulé à la section 2.3.4 et mis en évidence plus précisément aux chapitres 4 et 5. Lors de la calibration de modèle, il a également été mis en évidence [12, 132] l'existence de phénomènes de compensation entre les paramètres à calibrer. Cela implique, en pratique, que plusieurs modèles peuvent être utilisés pour reproduire les essais. Ainsi, des critères de sélection des modèles ont été développés afin de choisir le modèle tolérant le plus d'incertitude (ou le plus robuste) sur les paramètres à calibrer.

Comme nous apportons des éléments supplémentaires aux chapitres 4 et 5 sur la calibration, nous invitons le lecteur à se reporter à ces chapitres pour plus de détails.

## 2.3 Quantification d'incertitude

### 2.3.1 Classification de l'incertitude : éléments sémantiques

La section 2.2 a permis de préciser les activités relatives à la quantification d'incertitudes pour la validation de modèle. Nous allons voir, ici, qu'il est possible de classer les incerti-

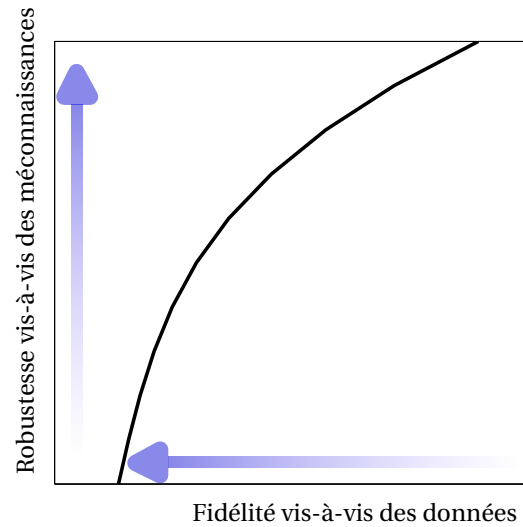


FIG. 2.2: Compromis entre fidélité vis-à-vis des données et robustesse vis-à-vis des incertitudes

tudes. D'autre part, plusieurs noms sont parfois utilisés pour un même type d'incertitude : on précisera ces éléments sémantiques.

La classification de l'incertitude est, depuis quelques années, bien établie : on citera, sans être exhaustif, [8, 65, 74, 75, 108, 125]. Les incertitudes sont divisées en deux catégories :

- les **incertitudes aléatoires** (ou incertitudes irréductibles, incertitudes stochastiques, incertitudes intrinsèques, variabilité, incertitudes de type A) sont dues à la variabilité intrinsèque du système étudié et de son environnement [108]. Elles caractérisent notamment la nature non déterministe d'un système et seront toujours présentes, même si l'on connaît précisément le système. Elles résultent, par exemple, de la variabilité des propriétés matériaux, de la variabilité des assemblages de composants, de la variabilité des conditions environnementales, etc. Ces incertitudes sont naturellement susceptibles d'affecter le fonctionnement d'un système ;
- les **incertitudes épistémiques** (ou incertitudes réductibles, incertitudes subjectives, méconnaissances, ignorance, incertitudes de type B) résultent d'un manque de connaissance et doivent pouvoir être diminuées par une augmentation de la quantité d'information. On y trouvera, par exemple, les modèles de comportement des matériaux, la prise en compte des termes non-linéaires dans le calcul de réponse, les erreurs

d'échantillonnage, etc. Ces incertitudes sont la conséquence de notre incapacité à appréhender complètement des phénomènes complexes.

Dans [8, 108], on distingue de plus l'**erreur**, une lacune identifiable dans la phase de modélisation ou d'expérimentation qui n'est pas due à une méconnaissance, de l'**incertitude**, une lacune potentielle dans la phase de modélisation ou d'expérimentation qui est due à la variabilité inhérente ou au manque de connaissance.

Enfin, notons que Knight [76] fait une distinction supplémentaire entre le **risque** dont l'occurrence est probabilisable et contre lequel on peut s'assurer et la **vraie incertitude** qui décrit un risque non mesurable et pour lequel il n'existe pas de mesure objective de probabilité.

Quel que soit le type d'incertitude, il est nécessaire de formaliser, idéaliser, mathématiquement et le plus honnêtement possible les incertitudes affectant un système. Il est important de noter que la classification de l'incertitude n'autorise pas de choisir automatiquement le modèle théorique associé. Dans [74], il est justement indiqué que la caractérisation de l'incertitude est un choix pragmatique et dépend de l'utilisation du modèle. Il semble, cependant, que le cadre probabiliste convienne bien à la prise en compte d'incertitude aléatoire dans la construction de modèle. En revanche, concernant les incertitudes épistémiques, il y a clairement plusieurs écoles. Certains considèrent que ces incertitudes peuvent être modélisées comme les incertitudes aléatoires (comme par exemple dans [134]), d'autres préfèrent utiliser des théories spécifiquement dédiées au traitement de ces manques de connaissance (comme par exemple dans [22, 93]).

On présente, dans la suite, un ensemble d'approches les plus couramment utilisées pour inclure l'incertitude dans la modélisation d'un système. On distinguera notamment les approches stochastiques, exploitant la théorie des probabilités, des approches non-stochastiques.

### 2.3.2 Méthodes stochastiques

Les méthodes stochastiques prennent en compte les incertitudes sous la forme de variables aléatoires (V.A.) et de champs stochastiques dans les modèles d'un système. Ce sont des méthodes très utilisées en pratique grâce d'une part à la maturité des concepts liés à la théorie des probabilités et d'autre part à leurs facilités de mise en œuvre. Il existe plusieurs visions pour construire une loi de probabilité. Une vision objective qui définit la probabilité à l'aide d'un estimateur statistique : une probabilité peut être considérée comme le passage à la limite d'une fréquence d'apparition d'un événement. Une autre vision, plus subjective, consiste à apprécier *a priori* la probabilité d'un événement. Cette vision peut notamment être révisée à l'aide d'observations par le biais du théorème de Bayes. Le principe du maxi-

Le principe du maximum d'entropie est une autre approche pour construire une loi de probabilité lorsque l'on dispose d'information : basé sur la notion d'entropie [131], ce principe donne la meilleure loi de probabilité parmi toutes celles qui vérifient un ensemble de contraintes définissant ainsi l'information disponible [68, 67]. Dans le cadre de la dynamique des structures, il n'est pas fréquent d'avoir une approche objective car le nombre d'expériences pour estimer de manière fiable les probabilités est trop important, on préfère utiliser des techniques de révision Bayésienne [129] ou le principe du maximum d'entropie [135].

L'implémentation des lois de probabilités dans les modèles de dynamique des structures se fait par des méthodes d'approximation en utilisant des générateurs de nombres aléatoires : on parle généralement de simulation de Monte-Carlo. Il existe plusieurs générateurs ou méthodes d'échantillonnage permettant, *via* l'exécution d'une suite de calculs déterministes, de représenter la loi de probabilité. La plus populaire est sans doute la méthode de Monte-Carlo (MC) [89]. Cependant, cette méthode souffre d'une vitesse lente de convergence (en  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ , avec  $n$  le nombre de tirages). On peut trouver un meilleur taux de convergence (en  $\frac{1}{n}$ ) pour la méthode du Quasi-MC [9]. C'est dans l'objectif de réduire le nombre de tirages nécessaires pour estimer correctement la distribution de la V.A. que les méthodes du Latin Hypercube (LHS) [87], et de réduction de la variance [13, 88] (ou échantillonnage préférentiel - *Importance Sampling*) ont été développées. Ces méthodes permettent donc de générer, de manière discrète, une loi de probabilité.

Les méthodes paramétriques proposent d'incorporer dans l'analyse mécanique les incertitudes sur les paramètres du modèle, par exemple, sur la géométrie (épaisseur d'un élément plaque), sur les matériaux (module d'Young) et/ou encore sur les conditions aux limites (raideur à l'interface). Dans cette approche, les paramètres, définis localement à l'échelle d'un élément, sont considérés comme des V.A. et l'objectif est de quantifier l'impact de ces lois de probabilités sur les propriétés stochastiques des matrices globales ou des réponses d'intérêt du modèle, comme par exemple dans [15], où l'objectif était d'obtenir un modèle capable de représenter la variabilité observée expérimentalement. La méthode la plus représentative de ce type d'approche est sans doute la méthode des Éléments Finis Stochastiques par approche spectrale [50], méthode permettant d'introduire l'aléa comme une dimension supplémentaire au problème EF classique.

Soize [135, 136] fait une distinction supplémentaire entre incertitude paramétrique et incertitude de modèle (ou non-paramétrique). La méthode non-paramétrique [1, 134] vise à prendre en compte l'incertitude du modèle en considérant les matrices globales du modèle EF comme étant des matrices aléatoires. La construction de ces matrices aléatoires est réali-

sée par le biais d'un paramètre de dispersion introduit dans une matrice de germe aléatoire définie positive. L'identification inverse de ce paramètre de dispersion à partir de données d'essais est formulée dans [31].

Les méthodes fiabilistes, bien qu'elles visent à répondre à des questions plus spécifiques, entrent dans le cadre des méthodes stochastiques. Ces méthodes s'attachent à prédire la probabilité de dépassement d'un état-limite à chaque instant, c'est à dire la probabilité de défaillance du système, tout au long de la durée en service [7]. Le dépassement d'un état-limite peut également se définir comme l'atteinte d'une condition non désirable dans le comportement de la structure, comme une exigence non satisfaite. Plusieurs approches sont possibles pour évaluer cette probabilité de défaillance. La méthode directe est une simulation de Monte-Carlo. Cependant, il est possible de montrer que pour avoir une estimation de la probabilité de défaillance de l'ordre de  $10^{-m}$ , il faut réaliser au moins  $10^{m+2}$  tirages [138], ce qui peut se révéler prohibitif lorsque que l'on s'intéresse à des événements de très faibles occurrences. Les méthodes approchées proposent d'approximer la surface de défaillance. Les méthodes FORM (*First Order Reliability Method*) et SORM (*Second Order Reliability Method*) forment respectivement un hyper-plan et parabolique tangent au point de conception et permettent d'approximer la probabilité de défaillance. Enfin, il est possible d'utiliser des techniques de réanalyse approchée comme les métamodèles [124] ou les bases de réduction de Ritz [120] pour évaluer la probabilité de défaillance.

Le lecteur souhaitant trouver plus de précisions sur les méthodes décrites ci-dessus pourra consulter par exemple [129, 118, 136, 139]. Les méthodes stochastiques semblent bien adaptées au traitement des incertitudes aléatoires mais lorsqu'il s'agit des incertitudes réductibles, elle ne s'applique qu'en cas de faibles méconnaissances, c'est à dire lorsqu'il est au moins encore possible d'utiliser des lois de probabilité *a priori*. Si ce n'est pas possible, on peut considérer que l'on est en présence de fortes méconnaissances et les approches alternatives aux méthodes stochastiques se révèlent alors très utiles pour la prise en compte des incertitudes épistémiques dans la construction des modèles.

### 2.3.3 Méthodes non-stochastiques

Les méthodes évoquées précédemment s'attachent à quantifier les incertitudes et à les propager à l'aide de la théorie des probabilités. Adopter une vision probabiliste pour la quantification d'incertitude peut sembler restrictif dans certains cas.

En présence de fortes méconnaissances, c'est-à-dire dans un contexte où très peu d'information est disponible, il est déjà très difficile de construire un modèle. On comprend bien

dès lors que choisir un type et une propriété de distribution pour une incertitude constitue une hypothèse forte. Cette hypothèse ne peut d'ailleurs pas être, dans tous les cas, justifiée scientifiquement. On imagine bien que cette justification est licite dans le cas où un composant est fabriqué à la chaîne puis testé. Ce n'est par contre pas le cas des alternateurs. On doit alors disposer de données d'essais suffisamment riches pour être capable de vérifier leurs adéquations à des lois de probabilités *via* des tests statistiques.

Par ailleurs, le caractère fortement non-linéaire d'un système ne se prête pas bien à une modélisation probabiliste. Par exemple, comme il est démontré dans [152], la réponse d'un simple oscillateur de Duffing à des niveaux élevés présente un caractère fractal. Ainsi, deux tirages de Monte-Carlo donneront deux réponses totalement différentes ou même encore l'approximation par un métamodèle est tout simplement impossible.

Certains auteurs ont donc émis des doutes sur cette utilisation excessive de lois de probabilité [94]. Pour ces raisons, de nouvelles méthodes ont été développées permettant de s'affranchir de la vision probabiliste de l'incertain.

Il est assez intuitif de décrire par de simples intervalles les incertitudes lorsque l'on ne sait pas quelles lois de probabilité associer aux paramètres incertains. C'est ce que l'on appelle la théorie des intervalles, dont les opérations arithmétiques formant le socle de la théorie ont été introduites dans [97, 98]. Le traitement numérique de la théorie des intervalles est différent du traitement numérique que l'on peut avoir lorsque l'on traite des V.A. suivant des lois de probabilité uniforme. Le principe est le suivant : soit  $(\underline{i}, \bar{i}) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $\underline{i} \leq \bar{i}$ , l'intervalle  $[I]$  est le sous-ensemble convexe, borné et fermé de réels tel que [96]

$$[I] = [\underline{i}; \bar{i}] := \{x \in \mathbb{R} : \underline{i} \leq x \leq \bar{i}\}. \quad (2.1)$$

Bien qu'il existe plusieurs types d'intervalle (ouvert, semi-ouvert), on restreindra la notion d'intervalle à des intervalles fermés. L'arithmétique permettant de propager, à travers un modèle, une incertitude idéalisée avec la théorie des intervalles est la suivante. Soit  $*$   $\in \{+, -, \times, \div\}$ , une opération arithmétique entre deux intervalles  $[I]$  et  $[J]$  est définie par

$$[I] * [J] = \{x * y : x \in [I], y \in [J]\}. \quad (2.2)$$

La propagation d'intervalles est, cependant, très pessimiste, ce qui est classiquement illustré par la fonction  $f(x) = 2x - x$ . Ainsi, en appliquant la règle de soustraction des intervalles, on obtient

$$f([I]) = [2\underline{i} - \bar{i}; 2\bar{i} - \underline{i}] \supset [I], \quad (2.3)$$

qui est un intervalle surévalué par rapport à celui que l'on devrait obtenir, à savoir  $[I]$  puisque  $f(x) = x$ . Ces surestimations proviennent du fait que la dépendance des occurrences en  $x$

n'est pas prise en compte. Pour pallier à ces problèmes, l'arithmétique affine a été développée [33]. Des travaux dans le domaine de la dynamique des structures [38, 39] ont, par exemple, permis d'obtenir des FRFs enveloppes.

La théorie des ensembles flous [154] est une généralisation possible de la théorie des intervalles et a été introduite afin de représenter la dimension humaine des connaissances. En effet, dans la vision logique classique, un nombre appartient à un ensemble ou non. Cette traduction mathématique ne permet pas d'introduire une vision intuitive, humaine, à la notion d'appartenance d'un nombre à un ensemble. Alors qu'un intervalle classique permet de faire une distinction claire de la notion d'appartenance d'un nombre à cet intervalle, l'ensemble flou permet d'introduire de manière graduelle une transition entre l'état d'appartenance et de non-appartenance par le biais d'une fonction appelée fonction d'appartenance  $\mu_{\tilde{x}}(x)$ . De manière générale, la fonction d'appartenance décrit le niveau d'appartenance de chaque élément  $x$  dans un domaine  $X$  par l'ensemble flou  $\tilde{x}$  suivant :

$$\tilde{x} = \{(x, \mu_{\tilde{x}}(x)) : x \in X ; \text{ et } ; \mu_{\tilde{x}}(x) \in [0 ; 1]\} \quad (2.4)$$

Si  $\mu_{\tilde{x}}(x) = 1$  alors  $x$  appartient à l'ensemble flou  $\tilde{x}$ . Si  $\mu_{\tilde{x}}(x) = 0$  alors  $x$  n'appartient pas à l'ensemble flou  $\tilde{x}$ . Si  $0 \leq \mu_{\tilde{x}}(x) \leq 1$ , alors l'appartenance est incertaine. Les fonctions d'appartenance les plus fréquemment utilisées sont des fonctions de forme triangulaire et Gaussienne (figures 2.3) [93].

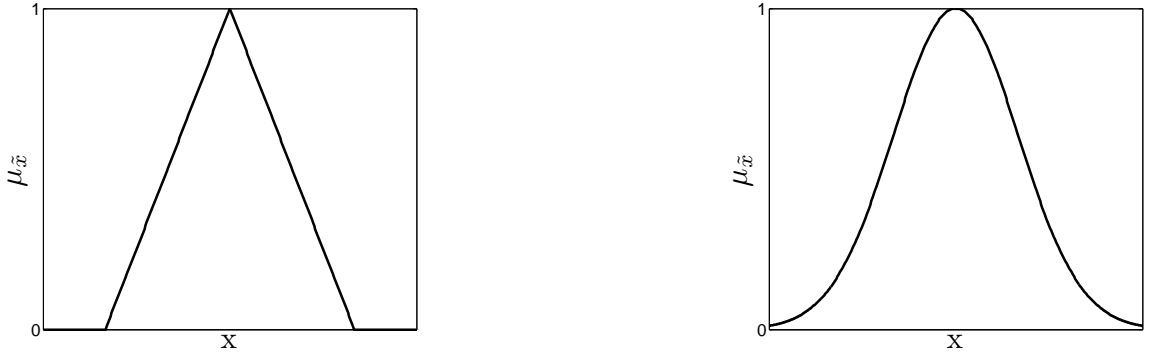


FIG. 2.3: Formes triangulaire et Gaussienne

La méthode des éléments finis flous (*Fuzzy Finite Element Method*) développée dans [121] permet d'imbriquer les intervalles flous dans la démarche EF classique. Cependant, en pratique, on se ramène à un intervalle en réalisant des  $\alpha$ -cut sur les fonctions d'appartenance et donc pour chaque niveau de  $\alpha$ , on dispose d'un problème dont les paramètres sont modélisés par des intervalles. On pourra par ailleurs citer les travaux de [85] concernant le



calcul des solutions propres floues par des approximants de Padé. Pour un état de l'art intéressant et récent sur la théorie des ensembles flous appliquée au domaine de la dynamique des structures, on pourra se référer à [93]. On notera enfin qu'il existe une *toolbox* Matlab® dédiée à la manipulation d'ensembles flous, nommée *Fuzzy Logic Toolbox*.

La théorie de Dempster-Shafer, ou théorie des preuves, [35, 130] permet de relâcher les hypothèses faites lors de la construction d'une loi de probabilité dans le cas où l'on dispose de peu d'information. Les variables d'entrées sont modélisées par des intervalles et l'utilisateur affecte une probabilité à chaque intervalle (appelée BPA *Basic Probability Assignment*), indiquant quelle est la probabilité que l'entrée incertaine rentre dans l'intervalle. Par exemple, dans [140], le coefficient de Poisson  $\nu$  a une BPA de 0.7 lorsque  $\nu \in [0,45 ; 0,475]$  et une BPA de 0.3 lorsque  $\nu \in [0,475 ; 0,495]$ . La théorie de Dempster-Shafer a deux mesures d'incertitude, les fonctions de croyance et de plausibilité. Les intervalles sont propagés pour calculer la croyance (une borne inférieure de la probabilité qui est consistante avec les preuves) et la plausibilité (une borne supérieure de la probabilité qui est consistante avec les preuves). Ensemble, croyance et plausibilité fournissent un encadrement de la loi de probabilité. On peut voir cette théorie comme une généralisation des méthodes probabilistes subjectives Bayésiennes bien qu'elle semble plutôt destinée au traitement des incertitudes épistémiques [140].

Enfin, la théorie des méconnaissances [79, 118, 44, 49] est une approche empruntant des notions de théorie des intervalles et de probabilités : on peut donc la voir comme une approche mixte probabiliste/non probabiliste. L'idée à la base de cette approche est d'introduire des variables internes, nommées méconnaissances de base, au modèle discrétisé EF. Ces méconnaissances de base sont alors contenues dans un intervalle dont les bornes sont stochastiques.

Ces méthodes s'avèrent être des alternatives intéressantes au cadre probabiliste suggéré par les méthodes stochastiques notamment lorsque l'information est manquante c'est à dire lorsque l'on ne peut pas justifier du choix d'une loi de probabilité. Toutes ces méthodes, stochastiques et non-stochastiques, délivrent des outils pour propager les incertitudes dans un modèle et, ainsi, quantifier leurs effets sur les réponses d'intérêt du modèle. L'objectif *in fine* pour le concepteur est de faire en sorte que l'incertitude affecte peu le système. Mais au lieu de chercher à réduire l'incertitude, peut-on évaluer la capacité d'un modèle à résister à ces méconnaissances et, si oui, peut-on améliorer cette capacité ? C'est l'objet de la section 2.3.4.

### 2.3.4 Analyse de robustesse info-gap

La théorie info-gap [22] a émergé sous l'impulsion de Y. Ben-Haim dans l'objectif de fournir des outils d'aide à la décision dans un contexte d'incertitudes sévères<sup>1</sup>. Construire un modèle, c'est prendre une décision. On comprend tout de suite l'intérêt de développer des outils permettant de conforter, ou non, les choix réalisés lors de la construction des modèles.

La théorie info-gap fournit une représentation quantitative de l'incertitude au sens de Knight<sup>2</sup>, c'est à dire l'incertitude, pour laquelle il n'existe pas de mesure objective de la probabilité. Plus précisément, la théorie info-gap quantifie la distance - (*the gap*) - entre l'information - *info* - qui est connue et celle qu'il est nécessaire de connaître pour prendre une décision fiable. Lors d'une prise de décision, il est clairement désirable d'avoir cette distance la plus petite possible. Après avoir rappelé la base philosophique de la théorie info-gap, on détaillera ensuite comment cette distance est construite et comment sont traduits mathématiquement les assertions « ce qui est connu » et « ce qui doit être connu ».

La philosophie de l'approche se base sur le concept de rationalité limité développé par Simon [133] : face à la prise de décision, le comportement humain est rationnel - les êtres humains peuvent expliquer les décisions qu'ils prennent - mais il est également limité - les êtres humains sont incapables, lors d'une prise de décision, d'imaginer et de conceptualiser toutes les possibilités et leurs conséquences. Lors d'un choix complexe, c'est à dire dans une situation de grandes incertitudes, notre comportement humain nous pousse à choisir une situation raisonnable. C'est la raison pour laquelle la théorie est qualifiée de *satisficing*<sup>3</sup>, qui est en fait un mot-valise formé des mots *satisfactory* (satisfaisant) et *sufficing* (suffisant). En utilisant la théorie info-gap, l'analyste est invité à prendre une décision satisfaisante plutôt qu'une décision optimale.

Suivre une approche info-gap nécessite la définition de trois modèles : le modèle du système, le modèle de prise de décision et le modèle d'incertitude info-gap (p. 44-45 dans [22]).

---

1. Le site <http://info-gap.com/> fournit des informations actualisées sur la théorie info-gap et son application dans les différents domaines.

2. Il existe d'autres approches comme le critère du MaxMax (prendre la décision qui rapporte un gain maximum : c'est un critère optimiste), le critère de Wald ou MaxiMin (prendre la décision qui maximise le gain minimum : c'est un critère pessimiste), le critère de Savage ou MiniMax (prendre la décision qui minimise le regret maximum, défini comme le manque à gagner en n'ayant pas choisi la bonne action pour chaque état de la nature), etc. Ces méthodes issues de la théorie des décisions, bien qu'intéressantes, n'entrent pas dans le cadre de la thèse. On se contentera, ici, de décrire la théorie info-gap.

3. la traduction littérale française est inexistante mais on trouve dans [34] que *satisfice* peut se traduire par : « principe du seuil de satisfaction de l'individu ».

Ces trois modèles permettent de définir deux fonctions d'aide à la décision, à savoir, la fonction robustesse et la fonction opportunité. Tous ces éléments sont détaillés dans la suite, avec notamment quelques exemples empruntés dans la littérature. Le lecteur intéressé pourra compléter ces exemples par les études concernant le positionnement optimal de capteurs en présence de méconnaissance de modèle [148], la détermination de facteurs de sécurité en présence de méconnaissance de modèle [66] ou encore la calibration de modèle en présence de méconnaissance [114, 144].

**Le modèle du système** établit la relation fonctionnelle entre ses entrées - constituées de paramètres connus, regroupés dans le vecteur  $\mathbf{q}$ , et de paramètres inconnus, regroupés dans le vecteur  $\mathbf{u}$  - et ses sorties d'intérêt, regroupés dans le vecteur  $\mathbf{y}$ . Il est important de noter que le sens du mot paramètre est très général et n'est pas restreint aux paramètres d'un modèle EF (cela peut être par exemple les paramètres d'une loi de probabilité). Le modèle du système s'écrit

$$\mathcal{M}(\mathbf{q}, \mathbf{u}) = \mathbf{y}. \quad (2.5)$$

Concrètement, dans les cas d'application de la théorie info-gap restreinte à la dynamique des structures, les modèles de système permettent par exemple d'établir les relations entre :

- l'effort, la matrice de flexibilité - considérés comme incertain - et le niveau maximum de réponse - considéré comme la sortie d'intérêt du système - (section 4 dans [23]) ;
- la précontrainte des liaisons, les angles d'inclinaisons du système étudié et l'échantillonnage du signal d'entrée - considérés comme incertains - et une métrique  $L^2$  calcul/essai - considérée comme la sortie d'intérêt du système - [63].

**Le modèle de prise de décision** est une relation portant sur la réponse d'intérêt du système. C'est sur la base de cette relation que la décision sera évaluée. De par sa formulation très générale, il n'est pas aisé de la traduire mathématiquement. Cette relation traduit le niveau d'exigence que l'on désire lorsque l'on prend la décision. Par exemple, si on désire que la réponse d'un système n'excède pas une valeur seuil, notée  $y^c$ , on a

$$|\mathbf{y}| \leq y^c. \quad (2.6)$$

Dans le domaine de la dynamique des structures, les modèles de prise de décision couramment construits sont par exemple :

- le niveau maximum de réponse ne doit pas dépasser une valeur seuil (section 4 dans [23]) ;
- la distance calcul/essai ne doit pas dépasser une valeur seuil [63].

**Le modèle d'incertitude info-gap** représente l'espace de variation de l'incertitude sous la forme d'imbrication de domaines convexes<sup>4</sup>. Plus précisément, ces modèles sont constitués d'une famille infinie de sous-ensembles centrés et imbriqués sur les estimations des paramètres incertains, paramètres que l'on notera  $\mathbf{u}^0 \in \mathbb{R}^p$  avec  $p$  le nombre de paramètres incertains. La taille de ces sous-ensembles est contrôlée par un réel positif, appelé horizon d'incertitude et noté  $\alpha$ . Ces sous-ensembles convexes sont notés  $\mathcal{U}(\alpha, \mathbf{u}^0)$ . Il est important de noter qu'il n'existe pas de restriction sur la nature mathématique des paramètres  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$ . Par exemple, les paramètres incertains peuvent être des paramètres associés à des lois de distribution, ce qui revient à considérer la loi de probabilité comme incertaine. Ces modèles particuliers sont qualifiés de modèles hybrides. On pourra consulter le chapitre 10 de [22] ou encore [117] pour plus de détails. Il existe divers modèles d'incertitude info-gap (cf. p. 20 dans [22]). Par exemple :

- le modèle enveloppe s'écrit

$$\mathcal{U}(\alpha, \mathbf{u}^0) = \{\mathbf{u} : \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^0\|_\infty \leq \alpha \mathbf{w}^T \mathbf{u}^0\}, \quad (2.7)$$

avec  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^p$  un vecteur de pondération permettant d'affecter plus ou moins d'incertitude sur les différents paramètres incertains constituant  $\mathbf{u}$ .

- le modèle ellipsoïdal s'écrit

$$\mathcal{U}(\alpha, \mathbf{u}^0) = \{\mathbf{u} : (\mathbf{u} - \mathbf{u}^0)^T \mathbf{W} (\mathbf{u} - \mathbf{u}^0) \leq \alpha^2\}, \quad (2.8)$$

avec  $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{p \times p}$  une matrice symétrique, réelle et définie positive. Cette matrice fournit les longueurs de demi-axes de l'ellipsoïde associées à chaque paramètre incertain. Un exemple est disponible à la section 3.2.3.

- le modèle énergétique s'écrit

$$\mathcal{U}(\alpha, \mathbf{u}^0) = \left\{ \mathbf{u} : \int_0^{+\infty} (\mathbf{u} - \mathbf{u}^0)^2 \leq \alpha^2 \right\}, \quad (2.9)$$

- le modèle hybride ( $\mathbf{u}_X^0$  est alors la loi de probabilité de la V.A.  $X$ ) s'écrit

$$\mathcal{U}(\alpha, \mathbf{u}_X^0) = \left\{ \mathbf{u}_X : \mathbf{u}_X \geq 0, \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{u}_X = 1, |\mathbf{u}_X - \mathbf{u}_X^0| \leq \alpha \mathbf{u}_X^0 \right\}. \quad (2.10)$$

À titre d'illustration, la figure 2.4 représente les modèles enveloppe et ellipsoïdal lorsque

$$p = \dim(\mathbf{u}) = 2. \quad (2.11)$$

---

4. La restriction à des domaines convexes n'est pas exigée, contrairement à la propriété d'imbrication, mais modifie les propriétés mathématiques des modèles d'incertitude. En pratique, les modèles d'incertitude représentant un domaine non-convexe sont très peu utilisés.

Soit  $\alpha \geq 0$  et  $\mathbf{u}^0$  l'estimation initiale des paramètres incertains ayant pour valeur  $\mathbf{u}^0 = [1; 1]$ , le modèle  $\mathcal{U}_1(\alpha, \mathbf{u}^0)$  est le modèle enveloppe : pour une valeur de  $\alpha$  donnée, les paramètres incertains appartiennent au sous-espace  $\mathcal{U}_1(\alpha, \mathbf{u}^0)$  représenté à gauche sur la figure 2.4. Le modèle  $\mathcal{U}_2(\alpha, \mathbf{u}^0)$  est un modèle ellipsoïdal représenté à droite sur la figure 2.4 avec

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \frac{1}{w_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{w_2^2} \end{bmatrix}, \quad (2.12)$$

et  $w_1 > w_2$ . Le modèle  $\mathcal{U}_3(\alpha, \mathbf{u}^0)$  est un modèle ellipsoïdal particulier : les longueurs de demi-axes sont toutes les mêmes ( $w = w_1 = w_2$ ) et le sous-espace représente un disque de rayon  $w\alpha$ . Comme  $\alpha$  est inconnu, ces modèles ne sont pas fixés.

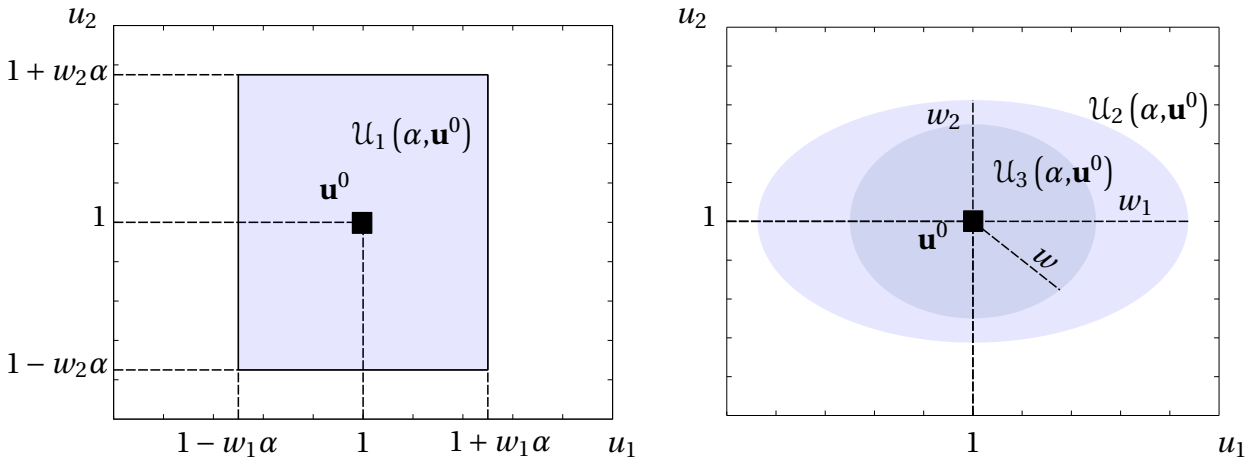


FIG. 2.4: Modèle d'incertitude enveloppe (gauche) et ellipsoïdal (droite)

La diversité de ces modèles nous suggère qu'il n'y a pas de façon universelle dont l'incertitude est imbriquée. Le choix du modèle d'incertitude est clairement dicté par la physique du système et s'avère être subjectif<sup>5</sup>. Découlant généralement des propriétés de convexité des sous-ensembles, les modèles d'incertitude info-gap possèdent des propriétés mathématiques intéressantes, formulées initialement dans [21] :

- **Imbrication.** Soient  $\mathcal{U}(\alpha, \mathbf{u}^0)$  et  $\mathcal{U}(\beta, \mathbf{u}^0)$ , deux modèles info-gap, alors :

$$\alpha \leq \beta \Rightarrow \mathcal{U}(\alpha, \mathbf{u}^0) \subseteq \mathcal{U}(\beta, \mathbf{u}^0). \quad (2.13)$$

- **Contraction.** Le modèle info-gap particulier  $\mathcal{U}(\alpha = 0, \mathbf{u}^0)$  est un singleton constitué du centre :

$$\mathcal{U}(\alpha = 0, \mathbf{u}^0) = \{\mathbf{u}^0\}. \quad (2.14)$$

5. Cependant, il existe des stratégies pour calibrer les modèles d'incertitude en fonction de l'information disponible : ces stratégies sont présentées et illustrées à la section 3.2.3.

- **Translation.** Soit  $\mathcal{U}(\alpha, \mathbf{u}^0)$  un modèle info-gap et  $\mathbf{0}$  l'élément neutre de  $\mathbb{R}^p$ , l'espace dans lequel se situe  $\mathbf{u}^0$ , alors :

$$\mathcal{U}(\alpha, \mathbf{u}^0) = \mathcal{U}(\alpha, \mathbf{0}) + \mathbf{u}^0. \quad (2.15)$$

- **Expansion linéaire.** Soit  $\mathcal{U}(\alpha, \mathbf{0})$  un modèle info-gap, alors,  $\forall (\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ , on a :

$$\mathcal{U}(\beta, \mathbf{0}) = \frac{\beta}{\alpha} \mathcal{U}(\alpha, \mathbf{0}). \quad (2.16)$$

La théorie info-gap repose principalement sur l'utilisation des fonctions d'aide à la décision ou fonction immunités : la fonction robustesse et la fonction opportunité. Comme indiqué p. 37 dans [22], « l'incertitude peut être soit néfaste soit propice ». Bien que cette observation semble triviale, la théorie info-gap, par l'intermédiaire des fonctions robustesse et opportunité, permet de quantifier ces deux aspects de l'incertitude. La fonction robustesse exprime le plus grand horizon d'incertitude pour lequel aucune défaillance ne peut avoir lieu. Dans [22], la robustesse est interprétée comme le degré de résistance vis-à-vis de l'incertitude et l'immunité contre la défaillance : on cherchera donc à maximiser cette valeur. Elle est généralement notée  $\hat{\alpha}(\mathbf{q}, y^c)$ . Elle dépend intimement des modèles définis précédemment et s'exprime par

$$\hat{\alpha}(\mathbf{q}, y^c) = \max \left\{ \alpha : \left( \max_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}(\alpha, \mathbf{u}^0)} \mathcal{M}(\mathbf{q}, \mathbf{u}) \right) \leq y^c \right\} \in \mathbb{R}_+. \quad (2.17)$$

La robustesse permet donc d'obtenir le plus grand sous-espace  $\mathcal{U}(\alpha, \mathbf{u}^0)$  possible sans que le système ne soit défaillant - au sens du modèle de prise de décision.

La fonction opportunité est la définition duale de la fonction robustesse. Cette fonction exprime le plus faible niveau d'incertitude pour lequel une performance espérée  $y^e$  peut se produire. Le pendant de l'équation (2.17) est donc

$$\hat{\beta}(\mathbf{q}, y^e) = \min \left\{ \alpha : \left( \min_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}(\alpha, \mathbf{u}^0)} \mathcal{M}(\mathbf{q}, \mathbf{u}) \right) \leq y^e \right\} \in \mathbb{R}_+. \quad (2.18)$$

Les fonctions robustesse et opportunité<sup>6</sup> sont des fonctions monotones vis-à-vis de l'exigence de performance. Cette propriété découle directement d'un théorème exprimant les compromis entre exigence de performance et immunité vis-à-vis des incertitudes.

Soit  $(y^{c_1}, y^{c_2})$  deux critères de performance fixés, alors il est possible de démontrer l'assertion suivante :

$$y^{c_1} > y^{c_2} \Rightarrow \hat{\alpha}(\mathbf{q}, y^{c_1}) \geq \hat{\alpha}(\mathbf{q}, y^{c_2}). \quad (2.19)$$

Cette relation met donc en évidence le compromis qu'il existe entre exigence de performance et robustesse vis-à-vis des incertitudes. Pour étudier ces compromis, on trace des

---

6. Dans la suite, on ne parlera plus d'opportunité car on s'intéresse uniquement aux effets potentiellement néfastes des incertitudes sur les systèmes étudiés.

courbes de robustesse qui sont la représentation graphique de la relation  $\hat{\alpha}(\mathbf{q}, y^c) = f(y^c)$ . Naturellement, les courbes de robustesse sont monotones (croissantes) : c'est une propriété découlant directement de l'équation (2.19) dérivant des propriétés d'imbrication des modèles d'incertitude info-gap.

Une illustration des étapes successives pour obtenir une courbe de robustesse est présentée sur la figure 2.5. Deux paramètres incertains,  $u_1$  et  $u_2$ , sont modélisés par le modèle d'incertitude info-gap enveloppe  $\mathcal{U}(\alpha, \mathbf{u}^0)$  formulé à l'équation (2.7) avec  $\mathbf{w} = [1; 1]$  et représenté sur la partie gauche de la figure 2.5 pour différents niveaux de  $\alpha$ . La partie droite de la figure 2.5 représente la courbe de robustesse, c'est à dire la représentation graphique de l'horizon d'incertitude en fonction de la performance. Lorsque  $\alpha = 0$ , il n'y pas d'incertitude dans le système, et le point A est la performance nominale du système obtenue lorsque les paramètres incertains sont à leurs valeurs initiales : dans ce cas,  $\mathcal{U}(\alpha = 0, \mathbf{u}^0)$  est un singleton. Lorsque  $\alpha = \alpha_B > 0$ , les paramètres incertains peuvent évoluer dans un carré. Le point B correspond au point de l'espace d'incertitude  $\mathcal{U}(\alpha_B, \mathbf{u}^0)$  qui fournit la performance du modèle la plus défavorable, lorsque  $\mathbf{u} \in \mathcal{U}(\alpha_B, \mathbf{u}^0)$  : on reporte sur la courbe de robustesse la valeur de performance correspondante en abscisse et  $\alpha_B$  en ordonnée. On suit ce même raisonnement pour  $\alpha_C$  et  $\alpha_D$  avec  $\alpha_D > \alpha_C > \alpha_B$ . La partie gauche permet de mettre en évidence les propriétés d'imbrication des modèles d'incertitude. Finalement, si  $y^c$  est la valeur de performance critique, alors d'après la partie droite de la figure 2.5, la robustesse du système est  $\hat{\alpha} = \alpha_D$ .

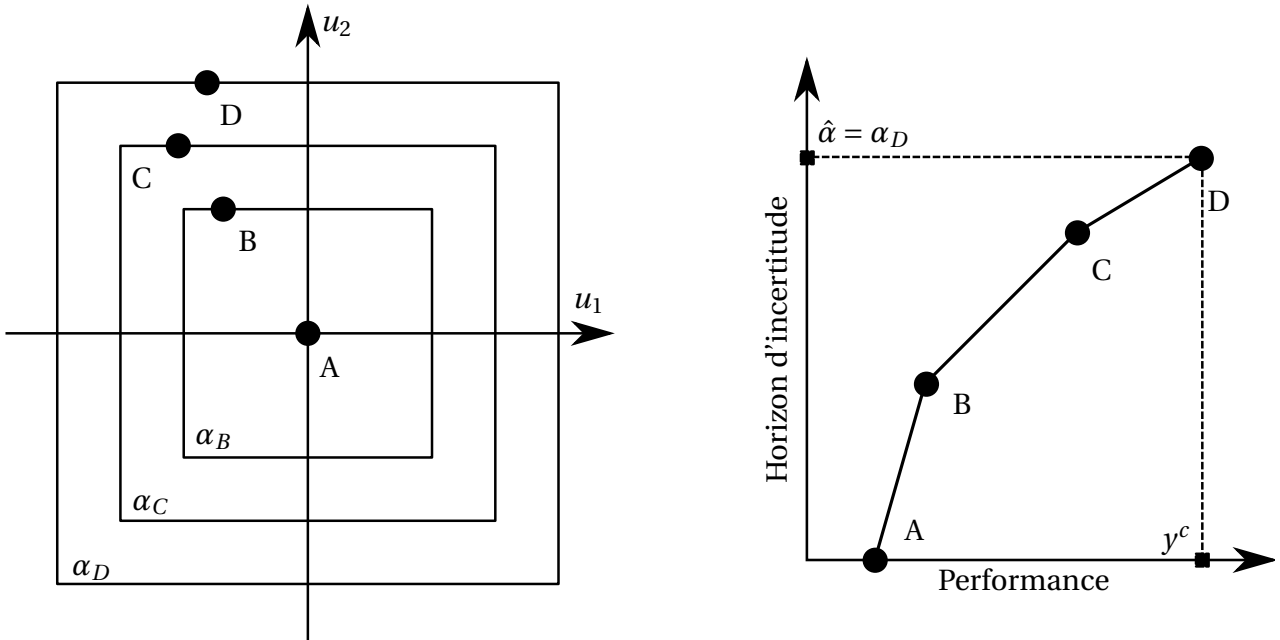


FIG. 2.5: Illustration des étapes successives pour obtenir une courbe de robustesse

Tout au long du mémoire, de nombreuses courbes de robustesse seront présentées. Bien que l'obtention analytique soit possible pour l'étude de systèmes simples, généralement, il faut implémenter des méthodes d'optimisation pour obtenir la fonction robustesse sur des systèmes plus complexes. Ces points sont discutés en annexe [A](#).

### 2.4 Bilan

Ce chapitre a pour objectif de fournir le cadre scientifique dans lequel s'inscrit cette thèse. Bien que la thèse ne traite pas intensivement toutes les questions relatives à la démarche V&V, on s'intéresse ici aux méthodes permettant de prendre en compte l'incertitude dans la construction des modèles. Le nombre conséquent de travaux cités, se rapportant directement à cette thématique, met en évidence les activités de recherches particulièrement importantes dans ce domaine. Après la lecture de ce chapitre se basant sur ces travaux, les points que nous pouvons garder à l'esprit sont les suivants :

- Les méthodes stochastiques semblent convenir au traitement des incertitudes aléatoires. Cependant, construire un modèle stochastique requiert d'avoir à disposition un nombre important de données permettant de justifier la loi de probabilité choisie (tests  $\chi^2$ , Kolmogorov-Smirnov, etc.).
- Il semble plus difficile de dresser de telles conclusions pour le traitement des incertitudes épistémiques. Plusieurs théories matures (éléments flous, intervalles) permettent de propager assez facilement les incertitudes à travers un modèle. Il semble que le retour d'expérience (ou jugement d'expert) puisse bien s'adapter à la théorie des ensembles flous, permettant ainsi d'argumenter en faveur d'une fonction d'appartenance plutôt qu'une autre. Comme pour les méthodes stochastiques, il est également important de disposer de suffisamment de données pour justifier scientifiquement le choix du modèle permettant d'idéaliser l'incertitude.
- L'objectif commun de ces méthodes est de propager une incertitude à travers un modèle afin d'évaluer l'impact de l'incertitude sur des réponses d'intérêt.
- De par sa formulation générale (le modèle d'incertitude n'est pas imposé) et sa structuration en sous-ensembles imbriqués (le modèle d'incertitude n'est pas fixé), la théorie info-gap peut être interprétée comme une généralisation de l'ensemble des méthodes décrites ci-dessus. Elle permet également de délivrer des courbes de robustesse qui s'avèrent être des outils pratiques d'aide à la décision.

La problématique décrite dans le chapitre [1](#) montre que construire un modèle visant à prédire le comportement vibratoire des alternateurs passe nécessairement par la prise en compte d'incertitudes de type aléatoire (comme les propriétés matériaux des tôles feuilletées) et de type épistémique (comme l'évolution des solutions propres entre les configurations à l'arrêt



et les configurations en fonctionnement). D'autre part, peu d'information expérimentale est disponible, ce qui rend difficile la justification rigoureuse du choix d'un modèle d'incertitude. Ces observations associées aux conclusions de ce chapitre nous conduisent à exploiter la théorie info-gap tout au long de cette thèse.

# Analyse de robustesse de réponses en dynamique des structures

## Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction . . . . .</b>	<b>36</b>
<b>3.2</b>	<b>Formulation : cadre info-gap . . . . .</b>	<b>37</b>
3.2.1	Formulation . . . . .	37
3.2.2	Discussions . . . . .	41
3.2.3	Calibration des modèles d'incertitude . . . . .	43
<b>3.3</b>	<b>Validation de la méthodologie . . . . .</b>	<b>51</b>
3.3.1	Simulation de la variabilité sur les solutions propres . . . . .	52
3.3.2	Construction et calibration du modèle d'incertitude . . . . .	54
3.3.3	Résultats . . . . .	56
<b>3.4</b>	<b>Application sur des mesures réelles d'alternateur . . . . .</b>	<b>58</b>
3.4.1	Présentation du système . . . . .	58
3.4.2	Résultats . . . . .	60
<b>3.5</b>	<b>Bilan . . . . .</b>	<b>60</b>

---

### 3.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de proposer un indicateur visant à évaluer l'impact des méconnaissances affectant le modèle modal identifié à l'arrêt sur les niveaux de réponses en fonctionnement. Comme indiqué dans la section 1.1, le modèle modal - c'est à dire les fréquences de résonances, les modes propres, les taux d'amortissements et les masses modales - est identifié lorsque l'alternateur est à l'arrêt. Lors de la remise en route de l'alternateur, des phénomènes physiques, principalement thermiques et magnétiques, viennent modifier ce modèle modal.

Si l'on disposait d'un modèle EF prédictif, on pourrait s'appuyer sur celui-ci pour soit déterminer la sensibilité des solutions propres à des changements de température soit évaluer l'impact des couplages magnétiques sur les niveaux de réponse. Or, ce n'est pas le cas. Afin de prédire rapidement les niveaux de réponse en fonctionnement suite à des analyses modales expérimentales, on propose un indicateur. Pour construire cet indicateur, on va faire l'hypothèse que la méconnaissance de l'évolution du comportement dynamique entre les configurations à l'arrêt et en fonctionnement peut se traduire directement par une méconnaissance sur le modèle modal. Cette hypothèse n'est pas restrictive - au sens où des couplages entre les modes peuvent apparaître - mais facilite la construction de l'indicateur. On comprend bien que cette incertitude est de type épistémique : l'incertitude sur le modèle modal traduit notre incapacité à modéliser les phénomènes complexes mis en jeu lors du passage de la configuration à l'arrêt à la configuration en fonctionnement. Par ailleurs, le peu d'information dont on dispose, limité à une estimation - le modèle modal identifié à l'arrêt - nous amène à construire l'indicateur à l'aide du cadre offert par la théorie info-gap.

La décision que l'on cherche à prendre, sur la base de la valeur de l'indicateur, doit permettre de déterminer le niveau d'incertitude que l'on peut tolérer sur les modes propres identifiés (fréquences propres, taux d'amortissement modaux, norme et forme des vecteurs propres) sans que la réponse en fonctionnement ne dépasse un certain niveau critique. L'indicateur construit vise donc à analyser la robustesse<sup>1</sup> de la réponse vis-à-vis de solutions propres incertaines. L'indicateur fournira des courbes de robustesse qui seront utilisées pour évaluer la présence éventuelle d'un risque vibratoire. On notera que dans [146] (chap.8) une telle stratégie a déjà été proposée, cependant, l'incertitude dans les solutions propres étaient restreintes aux fréquences de résonances et taux d'amortissement modaux.

Pour construire cet indicateur en s'appuyant sur la théorie info-gap, on doit donc utiliser un

---

1. On parle bien d'analyse car c'est une action *a posteriori*, dans le cas contraire, certains auteurs préconiseraient de parler de préoccupation de la robustesse cf. [126].

modèle d'incertitude sur les modes propres, ce qui est formulé dans la section 3.2.1. Après avoir illustré la sensibilité des courbes de robustesse vis-à-vis du modèle d'incertitude en section 3.2.2, on verra que le modèle d'incertitude sur les modes propres peut également être révisé lorsque de l'information nouvelle est disponible : on proposera dans la section 3.2.3 une stratégie générale de calibration de modèles d'incertitude basée sur des données d'essais disponibles. On validera, expérimentalement, dans la section 3.3, la pertinence de la construction de l'indicateur. Il est important de noter que, à notre connaissance, peu de littérature traitant de la calibration de modèle d'incertitude à partir de données expérimentales est disponible. Par exemple, dans [2, 3, 48], les auteurs proposent la validation d'un modèle d'incertitude non-paramétrique basée sur des mesures réelles. Ici, il n'est pas nécessaire de faire l'hypothèse d'une quelconque distribution probabiliste pour calculer le maximum d'amplitude d'une réponse sur une bande fréquentielle d'intérêt. D'autre part, valider un modèle d'incertitude requiert beaucoup de données expérimentales (par exemple, 100 essais sont utilisés dans [3]), ce qui n'est pas une condition nécessaire pour calibrer le modèle d'incertitude dans le cas présent. Enfin, nous illustrerons à la section 3.4 l'utilisation de l'indicateur lorsqu'il est appliqué à des bases modales d'alternateur identifiées expérimentalement.

## 3.2 Formulation : cadre info-gap

### 3.2.1 Formulation

Le modèle modal peut être utilisé pour estimer les niveaux de réponses en fonctionnement des alternateurs. L'indicateur, construit à l'aide de la théorie info-gap, a pour objectif de fournir un outil d'aide à la décision en répondant à la question : quel niveau d'incertitude peut-on tolérer sur le modèle modal afin de s'assurer que les niveaux de réponses en fonctionnement ne dépassent pas une certaine valeur seuil ? On va répondre à cette question en effectuant une analyse de robustesse info-gap. Après avoir décrit comment on traduit mathématiquement l'incertitude sur le modèle modal, on va détailler, dans la suite, les différents modèles impliqués pour conduire une analyse de robustesse info-gap, sur la base des éléments fournis à la section 2.3.4.

Tout au long de ce mémoire,  $\omega_v$  correspondra à la fréquence propre du mode  $v$ ,  $\xi_v$  correspondra au taux d'amortissement modal du mode  $v$  et  $\phi_v$  correspondra au vecteur propre du mode  $v$ . Soit  $(\omega_v^0, \xi_v^0, \phi_v^0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{c,m}$  avec  $v \in \{1, \dots, m\}$  le modèle modal identifié constitué de  $m$  modes et  $c$  ddls lorsque l'alternateur est à l'arrêt : on considérera ces quantités comme étant connues. Soit  $(\omega_v, \xi_v, \phi_v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{c,m}$ , le modèle modal incertain. On fait l'hypothèse que le modèle modal incertain dérive du modèle modal nominal, modèle

qui est quant à lui supposé connu. Cette hypothèse est d'ailleurs valide pour des paires découplées de modes propres [115], ce qui est le cas en pratique. D'autre part, la modélisation que l'on propose implique de considérer qu'un nombre constant de modes participe à la réponse d'intérêt : dans le cas de l'alternateur, ce sont principalement les modes en 2 et 4 lobes qui contribuent le plus aux niveaux de réponse et il n'y a pas de raison *a priori* pour que, en fonctionnement, un nombre de modes plus élevé participe à la réponse. Soit  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$ , avec  $p = 2m + m^2$  et  $x_i$ , la  $i$ -ème composante de  $\mathbf{x}$ , un vecteur visant à perturber le modèle modal nominal (ou identifié). Soit  $v \in \{1, \dots, m\}$ , le vecteur  $\mathbf{x}$  est défini par :

$$\begin{cases} \omega_v = x_v \cdot \omega_v^0 \\ \xi_v = x_{v+m} \cdot \xi_v^0 \\ \boldsymbol{\phi}_v = \sum_{k=1}^m \boldsymbol{\phi}_k^0 x_{(1+v)m+k} \end{cases} \quad (3.1)$$

Avec cette formulation, le modèle modal incertain  $(\omega_v, \xi_v, \boldsymbol{\phi}_v)$  s'écrit en fonction du modèle modal nominal  $(\omega_v^0, \xi_v^0, \boldsymbol{\phi}_v^0)$  et du vecteur de perturbation  $\mathbf{x}$  : ce dernier est considéré comme incertain. On notera, d'autre part, que la perturbation du vecteur propre incertain sur le vecteur propre initial  $\boldsymbol{\phi}_v^0$ , telle que définie dans l'équation (3.1), introduit un changement de forme par projection sur la base modale initiale mais également une variation sur la norme du vecteur propre, que l'on qualifie couramment de masse modale. Ce choix est justifié dans la section 3.2.2.

Le vecteur particulier  $\mathbf{x}^0$  correspond à une perturbation nulle sur les modes propres : il n'est pas considéré comme incertain. À titre d'exemple, dans le cas où la base est constituée de  $m = 3$  modes, le vecteur  $\mathbf{x}^0$  sera :

$$\mathbf{x}^0 = \left( \underbrace{1, 1, 1}_{\text{perturbations sur } \omega_v^0, v \in \{1, 2, 3\}}, \underbrace{1, 1, 1}_{\text{perturbations sur } \xi_v^0, v \in \{1, 2, 3\}}, \underbrace{1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1}_{\text{perturbations sur } \boldsymbol{\phi}^0 = [\boldsymbol{\phi}_1^0 \boldsymbol{\phi}_2^0 \boldsymbol{\phi}_3^0]} \right)^T. \quad (3.2)$$

Avec ces définitions, les différents modèles impliqués dans l'analyse de robustesse sont les suivants :

- **le modèle du système.** Il établit la relation entre le modèle modal incertain et l'amplitude de la réponse en déplacement sur une bande fréquentielle d'intérêt. La relation entre le modèle modal incertain et la réponse en déplacement est donnée par la superposition modale, permettant à la réponse de se décomposer sur la base des modes basses fréquences. La réponse en déplacement  $\mathbf{y}$ , en régime harmonique permanent, à la fréquence  $\omega$  et à un effort  $\mathbf{f}$  s'écrit :

$$\mathbf{y}(\omega) = \sum_{v=1}^m \frac{\boldsymbol{\phi}_v \boldsymbol{\phi}_v^T \mathbf{f}}{-\omega^2 + 2j\xi_v \omega \omega_v + \omega_v^2}, \quad (3.3)$$

avec  $(\omega_v, \xi_v, \phi_v)$  défini à l'équation (3.1). Dans ce chapitre, on s'intéresse aux maximum des niveaux de réponse en déplacement sur une bande fréquentielle d'intérêt, que l'on notera  $\Omega$ . On peut alors réécrire l'équation (3.3) sous la forme décrite dans le paragraphe 2.3.4 :

$$\mathcal{M}(\mathbf{q}, \mathbf{x}) = \max_{\omega \in \Omega} \|\mathbf{y}(\omega)\|_{\infty}, \quad (3.4)$$

avec  $\mathbf{q} = \mathbf{F}$ ,  $\mathbf{x}$  défini à l'équation (3.1) et  $\|\mathbf{y}(\omega)\|_{\infty}$  la norme infinie de la réponse complexe  $\mathbf{y}(\omega) \in \mathbb{C}^c$ .

- **le modèle de prise de décision.** Il indique que le niveau de réponse ne doit pas dépasser une valeur seuil sur la bande fréquentielle d'intérêt. Dans ce cas, le modèle de prise de décision est simplement

$$\mathcal{M}(\mathbf{q}, \mathbf{x}) \leq y^c, \quad (3.5)$$

L'exigence de performance est traduite, ici, par la valeur critique  $y^c$  : plus cette valeur sera petite, plus on sera exigeant envers le système.

- **le modèle d'incertitude info-gap.** Il décrit la méconnaissance sur le modèle modal incertain. On considère que le vecteur  $\mathbf{x}$  incertain peut être modélisé par le modèle info-gap suivant :

$$\mathcal{U}(\alpha, \mathbf{x}^0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p : |\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| \leq \mathbf{w}\alpha\}, \quad (3.6)$$

où  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^p$  est un vecteur de pondération permettant d'affecter plus ou moins d'incertitude sur les différentes quantités propres (on détaillera la construction de ce vecteur dans la section 3.2.3) et  $\alpha \in \mathbb{R}_+$ , l'horizon d'incertitude qui est inconnu.

L'indicateur se matérialise par une courbe de robustesse, construit à l'aide de la fonction robustesse, qui est le plus grand horizon d'incertitude pour lequel la performance, au sens du modèle de prise de décision, est vérifiée et dont l'expression est rappelée, ici :

$$\hat{\alpha}(\mathbf{q}, y^c) = \max \left\{ \alpha : \left( \max_{\mathbf{x} \in \mathcal{U}(\alpha, \mathbf{x}^0)} \mathcal{M}(\mathbf{q}, \mathbf{x}) \right) \leq y^c \right\} \in \mathbb{R}_+. \quad (3.7)$$

Dans ce chapitre, on considère les paramètres du modèle du système  $\mathbf{q}$  comme étant fixés et connus, on notera donc :  $\hat{\alpha}(\mathbf{q}, y^c) = \hat{\alpha}(y^c)$ . Pour calculer les courbes de robustesse, on utilisera l'approche décrite en section A.3 de l'annexe A.

#### Illustration sur un cas académique

Dans l'objectif d'illustrer la démarche, on considère le système suivant constitué d'une poutre encastree-libre soumise à une force  $\mathbf{f}$  d'amplitude  $f = 1\text{N}$  qui est exercée à l'extrémité libre (cf. figure 3.1). On suppose que les modes sont obtenus (ou identifiés) suite à une discrétisation de la structure en 10 éléments. Les paramètres utilisés pour construire la poutre sont regroupés dans le tableau 3.1. La poutre étant sollicitée en flexion, on ne s'intéresse

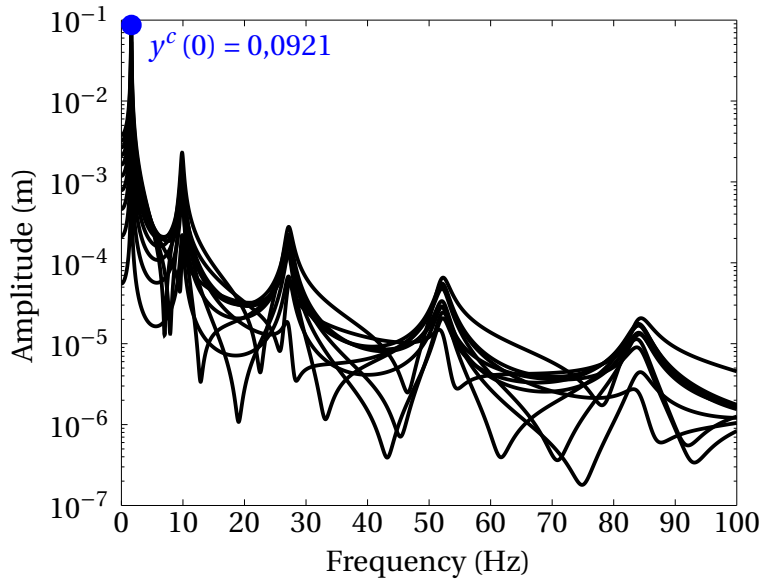


FIG. 3.1: Poutre encastée-libre

qu'à l'amplitude du déplacement transverse dans la poutre sur la bande fréquentielle d'intérêt  $\Omega = 2\pi \times [0; 100]$  Hz. La figure 3.2 présente l'amplitude de la réponse en déplacement transverse initiale sur chacun des 10 nœuds à l'excitation  $f$ . Cette réponse est calculée sur la base des modes propres extraits sur la bande fréquentielle  $[0; 300]$  Hz en considérant, pour chacun des modes, un taux d'amortissement modal arbitraire de  $\xi = 0.02$ . Dans la bande fréquentielle d'intérêt  $\Omega$ , les cinq modes résonants sont considérés comme incertains, ainsi  $p = 35$ . On va chercher à évaluer la robustesse du système vis-à-vis des cinq premières solutions propres incertaines. Le critère de performance utilisé est :

$$\max_{\omega \in \Omega} \|\mathbf{y}(\omega)\|_{\infty} \leq y^c. \quad (3.8)$$

Le modèle d'incertitude, défini à l'équation (3.6), est utilisé avec  $w_i = 1, \forall i \in \{1, \dots, p\}$ . On suppose donc que l'incertitude dans le modèle d'incertitude se propage de la même manière entre les différentes quantités propres. Au regard de la simplicité du problème et du coût de

FIG. 3.2: Réponse initiale à l'excitation  $F$  sur les 10 ddls

calcul de la réponse sur base modale (quasiment négligeable), on détermine la robustesse en utilisant l'approche semi-analytique décrite à la section A.3 de l'annexe A. On obtient la

Paramètres	Module d'Young	Masse volumique	Longueur	Diamètre
Valeurs	0,7 GPa	8500 kg.m <sup>-3</sup>	1 m	4 cm

TAB. 3.1: Paramètres géométriques et matérielles de la poutre

courbe de robustesse sur la figure 3.3 lorsque  $\alpha$  varie sur l'intervalle  $\mathcal{J} = [0; 0,2]$ . Cet intervalle a été préalablement discrétisé en 1000 éléments. Lorsque  $\hat{\alpha} = 0$ , il n'y pas d'incertitude dans le modèle modal et donc le maximum de la réponse sur  $\Omega$  est obtenu au voisinage du mode 1 (comme indiqué sur la figure 3.2) et a pour valeur  $y^c(\hat{\alpha} = 0) = 0,0921\text{m}$ . Lorsque  $\hat{\alpha} > 0$ , le modèle modal, utilisé pour calculer la réponse, est incertain et évolue dans le sous-espace de  $\mathbb{R}^p$  défini par l'équation (3.6) (avec une pondération unitaire pour les différentes quantités propres). Pour chaque niveau de  $\hat{\alpha}$ , on calcule le pire-cas<sup>2</sup> que l'on reporte sur l'axe des abscisses. Par exemple, une lecture de la courbe de robustesse peut être la suivante : si le retour d'expérience montre que l'on peut tolérer 60% de plus que l'amplitude de déplacement maximum (ce qui correspond à une valeur approximative de  $y^c = 0.15$ ), alors on peut tolérer un niveau d'incertitude de  $\hat{\alpha} = 0.1$  sur le modèle modal. On peut alors en déduire les variations que l'on peut tolérer sur les fréquences propres, les taux d'amortissement modaux et les vecteurs propres en utilisant l'équation (3.6) sans que l'amplitude maximum de la réponse en déplacement ne dépasse  $y^c = 0.15\text{m}$ . Dans ce cas, il est possible de tolérer<sup>3</sup> les variations suivantes dans les fréquences propres et taux d'amortissement modaux :

$$\begin{aligned} (1 - 0.1) \times \omega_v^0 &\leq \omega_v \leq (1 + 0.1) \times \omega_v^0 \\ (1 - 0.1) \times \xi_v^0 &\leq \xi_v \leq (1 + 0.1) \times \xi_v^0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

De façon générale, une courbe de robustesse qui tend vers une asymptote verticale traduit un comportement robuste du système vis-à-vis des incertitudes : on peut tolérer beaucoup d'incertitude sur le système sans entraîner sa défaillance (au sens du modèle du prise de décision). *A contrario*, une courbe de robustesse qui tend vers une asymptote horizontale traduit un comportement très peu robuste du système vis-à-vis des incertitudes : on ne peut pas tolérer beaucoup d'incertitude sur le système sans risquer d'entraîner sa défaillance.

#### 3.2.2 Discussions

Certains lecteurs pourraient voir un lien entre l'analyse de robustesse de la réponse dynamique et une analyse de sensibilité. Outre le fait que ces deux types d'analyses ne rem-

2. Une analyse de robustesse info-gap se différencie d'une analyse pire-cas dans le sens où le pire-cas n'est pas connu car le niveau de sévérité des incertitudes est méconnu.

3. C'est effectivement vrai dans la mesure où le calcul de la réponse sur le modèle modal représente bien la réalité.



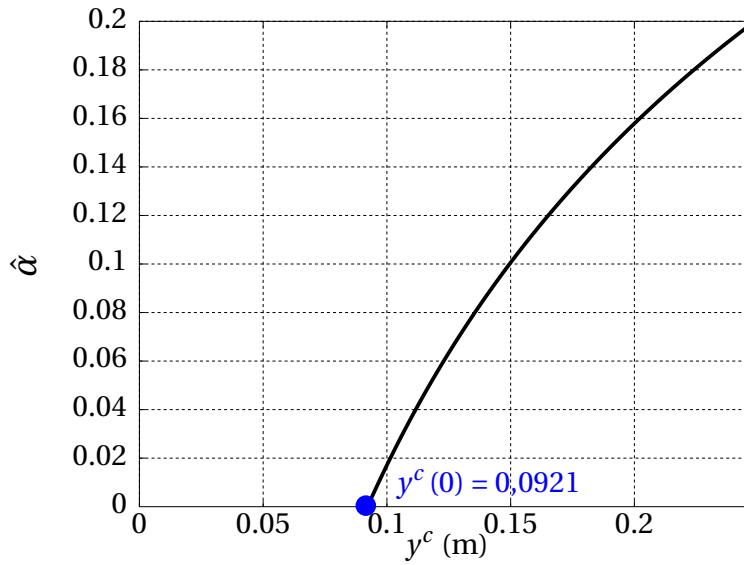


FIG. 3.3: Courbe de robustesse

plissent pas les mêmes objectifs - une analyse de sensibilité permet d'évaluer quantitativement ou non l'impact de paramètres d'entrées sur des paramètres de sortie alors qu'une analyse de robustesse info-gap permet d'évaluer le niveau d'incertitude que l'on peut tolérer sur les paramètres incertains sans changer de décision -, les méthodes de résolution diffèrent également : dans le cas d'une analyse de robustesse, on implémente généralement des méthodes d'optimisation ce qui est rarement fait pour des analyses de sensibilité (qu'elles soient locales ou globales). Enfin, une analyse de robustesse ne peut pas être confondue avec une étude de sensibilité dans le sens où on ne connaît pas dans quelle mesure les paramètres physiques affectent le modèle modal.

D'autre part, certains lecteurs peuvent être surpris par le choix du modèle d'incertitude. Notamment, ces trois questions semblent pertinentes :

1. Dans quelle mesure le modèle d'incertitude représente-t-il la réalité ?
2. L'incertitude sur les vecteurs propres est décomposée sur la base des vecteurs propres initiaux, pourquoi ?
3. Quelles valeurs donner aux paramètres du modèle d'incertitude, notamment le vecteur de pondération ?

L'analyse de robustesse info-gap - telle que formulée dans la section 3.2.1 - délivre un indicateur d'aide à la décision. Cet indicateur utilise l'information que l'on dispose, à savoir, les résultats de l'identification de l'analyse modale expérimentale, avec l'objectif d'évaluer la robustesse de la réponse en fonctionnement. L'objectif n'est pas forcément que le modèle d'incertitude soit une représentation fidèle de la réalité, puisque l'on ne dispose pas

d'assez d'information. Pour représenter l'incertitude sur les pulsations propres et les amortissements modaux, il est assez raisonnable de les modéliser par des intervalles de longueurs variables, ce qui est fait ici ou encore dans [146].

En revanche, représenter l'incertitude sur les vecteurs propres sur la base des vecteurs propres initiaux demande quelques justifications. On ne peut clairement pas s'appuyer sur le modèle EF pour déterminer la sensibilité des vecteurs propres car le modèle EF n'est pas prédictif. La littérature sur ce sujet a toujours comme point de départ une incertitude au niveau du paramètre que l'on vient propager à travers le modèle pour obtenir une incertitude sur le vecteur propre (comme par exemple dans [14]). Ici, ce n'est pas possible. Bien que fastidieux, on pourrait considérer chaque composante du vecteur propre comme incertaine mais cela conduirait à des formes non-physiques. C'est la raison principale pour laquelle le choix d'une projection sur la base des modes propres initiaux a été fait. Cela se comprend aisément en prenant le cas d'un poutre encastrée à ses bords : on peut faire varier à souhait les propriétés matérielles et géométriques de la poutre, on sera toujours en mesure d'exprimer les vecteurs propres perturbés sur la base des vecteurs initiaux. La seule restriction est l'apparition de déformées localisées (par exemple, si l'on ajoute un ressort perpendiculaire à l'axe de poutre ou plus fréquemment si les propriétés ne sont pas homogènes) : dans ce cas la base modale initiale aura probablement des difficultés à représenter, si elle ne comprend pas, elle aussi, des phénomènes physiques localisés. Sur le cas de l'alternateur, les variations thermiques et magnétiques affectent globalement le système ce qui rend cette approximation licite.

La répartition de l'incertitude à travers les différentes quantités propres est gouvernée par le vecteur de pondération : le choix de ce vecteur est principalement basé sur le jugement de l'analyste. Cependant, on peut (et on doit lorsque l'information est disponible) calibrer ce vecteur de manière à améliorer la représentativité du modèle d'incertitude à la réalité : ce point est discuté dans la suite.

#### 3.2.3 Calibration des modèles d'incertitude

##### Sensibilité des décisions vis-à-vis des modèles d'incertitude

La fonction de décision robustesse dépend des différents modèles permettant sa construction : en particulier, la robustesse est sensible au modèle d'incertitude (forme et paramètres). En ce sens, la théorie info-gap n'échappe pas au GIGO (*Garbage In Garbage Out*), règle selon laquelle la qualité des résultats est fonction de la qualité des données d'entrée, comme, par exemple, les approches stochastiques qui dépendent des lois de probabilités. On va illus-

trer, ici, cette sensibilité en modifiant la définition du vecteur de pondération dans l'illustration présentée à la section 3.2.1. On considère désormais que  $w_i = 1, \forall i \in \{1, \dots, m\}$  et  $w_i = 2, \forall i \in \{m+1, \dots, 2m\}$  : cela signifie que le taux d'amortissement modal peut varier deux fois plus, en valeur relative, que les autres quantités propres. On obtient la nouvelle courbe de robustesse sur la figure 3.4, dans laquelle la courbe de robustesse initiale a été également tracée pour comparer l'impact de  $\mathbf{w}$  sur la forme de la courbe. On voit clairement que la définition de  $\mathbf{w}$  impacte les valeurs prises par la courbe de robustesse sans pour autant en changer la forme. Il est donc important de définir le plus honnêtement et le plus rigoureusement possible ce vecteur de pondération.

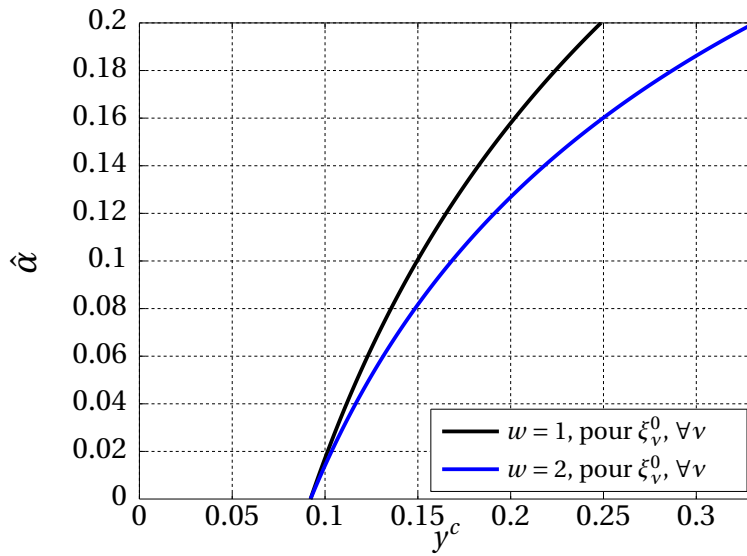


FIG. 3.4: Impact du choix de  $\mathbf{w}$  sur la courbe de robustesse

Cependant, l'approche privilégiée dans ce mémoire est d'inclure le plus de physique possible dans le modèle d'incertitude (utiliser l'information disponible), afin d'améliorer la représentativité du modèle aux variations observées réellement. La « bonne valeur » pour  $\mathbf{w}$  n'est donc pas triviale à connaître et il est préférable de s'appuyer sur des données d'essais pour calibrer ce paramètre. On pourra pour cela utiliser la stratégie décrite à la section suivante.

### Apport d'informations nouvelles dans les modèles d'incertitude

Comme on a pu l'indiquer dans la section 2.3.4, le choix du modèle d'incertitude relève de la capacité de l'analyste à comprendre le système étudié et dépend donc de l'analyste. Mais qu'advient-il, désormais, si l'on dispose d'informations nouvelles ? Par exemple, dans le cas des alternateurs, on peut sauvegarder, pour un alternateur donné, les bases modales

identifiées et les inclure dans le modèle d'incertitude afin d'améliorer le processus de prise de décision. Quels sont, alors, les outils existants permettant d'inclure cette nouvelle information dans le modèle d'incertitude ?

Comme indiqué dans le chapitre 8 de [22], on peut modifier les modèles d'incertitude en reconsidérant les hypothèses au niveau des paramètres du modèle (position du centre, valeurs des coefficients de pondération, etc) mais aussi de la forme (modèle d'incertitude de type enveloppe, de type ellipsoïdal, de type énergétique etc) en fonction de l'information disponible : on parle alors de calibration de modèle d'incertitude info-gap. Dans ce mémoire, on restreindra toutefois la calibration du modèle d'incertitude au niveau paramétrique : soit  $\mathbf{d}$  le vecteur regroupant les paramètres du modèle d'incertitude (par exemple, concernant le modèle écrit équation (3.6), le vecteur  $\mathbf{d}$  peut regrouper le centre  $\mathbf{x}^0$  et le vecteur de pondération  $\mathbf{w}$ ). Après avoir détaillé l'approche, on étudie le potentiel d'une telle stratégie à travers plusieurs exemples.

La première étape vise à quantifier l'adéquation entre le modèle d'incertitude existant, noté  $\mathcal{U}(\alpha, \mathbf{x}^0)$ , et les  $n$  données expérimentales disponibles après avoir construit le modèle d'incertitude, notées  $\mathbf{x}_i^t \in \mathbb{R}^p$  avec  $i \in \{1, \dots, n\}$  et  $\dim(\mathbf{x}^0) = p$ . On utilise la fonction *gap*, notée  $\Gamma(\mathbf{x}_i^t, \mathbf{d})$  pour quantifier cette adéquation. Soit  $i \in \{1, \dots, n\}$ , alors l'expression de la fonction *gap* est donnée par :

$$\Gamma(\mathbf{x}_i^t, \mathbf{d}) = \min \{ \alpha : \mathbf{x}_i^t \subseteq \mathcal{U}(\alpha, \mathbf{x}^0) \}. \quad (3.10)$$

Pour un essai donné  $\mathbf{x}_i^t$ , la fonction *gap* s'exprime simplement comme étant le plus petit horizon d'incertitude pour lequel  $\mathbf{x}_i^t$  est inclus dans le sous-ensemble défini par modèle d'incertitude info-gap  $\mathcal{U}(\alpha, \mathbf{x}^0)$ . De par les propriétés d'imbrication des modèles info-gap (cf. équation (2.13)), on a  $\Gamma(\mathbf{x}_i^t, \mathbf{d}) \neq \emptyset$ . Comme la fonction *gap* fournit un horizon d'incertitude particulier, on dira que  $\Gamma(\mathbf{x}_i^t, \mathbf{d})$  est un horizon d'incertitude empirique. Si la valeur de  $\Gamma(\mathbf{x}_i^t, \mathbf{d})$  est faible (resp. grande), alors le modèle info-gap est très (resp. peu) fidèle vis-à-vis des données observées.

La seconde étape consiste à définir la fonction coût utilisée pour calibrer le modèle d'incertitude info-gap  $\mathcal{U}(\alpha, \mathbf{x}^0)$ . On utilise la robustesse empirique qui s'exprime par

$$\hat{\alpha}_e(\mathbf{d}, y^c) = \max \left\{ \Gamma(\mathbf{x}_i^t, \mathbf{d}) : \Gamma(\mathbf{x}_j^t, \mathbf{d}) \leq \Gamma(\mathbf{x}_i^t, \mathbf{d}) \text{ si } \max_{\mathbf{x} \in \mathcal{U}(\Gamma(\mathbf{x}_j^t, \mathbf{d}), \mathbf{x}^0)} \mathcal{M}(\mathbf{q}, \mathbf{x}) \leq y^c, (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2 \right\}. \quad (3.11)$$

La robustesse empirique exprime le plus grand horizon d'incertitude empirique  $\Gamma(\mathbf{x}_i^t, \mathbf{d})$  parmi ceux fournissant un niveau de performance en dessous de la valeur critique (l'assertion si  $\mathcal{M}(\mathbf{q}, \mathbf{x}) \leq y^c$  avec  $\mathbf{x} \in \mathcal{U}(\Gamma(\mathbf{x}_j^t, \mathbf{d}), \mathbf{x}^0)$ ). Cette dernière condition permet de filtrer les données

expérimentales aberrantes ou tout simplement les données expérimentales fournissant une performance supérieure à la valeur critique  $y^c$ . En ce sens, on peut interpréter l'ajout de cette condition au problème d'optimisation comme une régularisation de Tikhonov [143], la valeur  $y^c$  jouant le rôle de paramètre de régularisation.

La dernière étape est la minimisation de la fonction coût, qui est réalisée, ici, en minimisant la robustesse empirique :

$$\mathbf{d}^*(y^c) = \operatorname{argmin} \{ \hat{\alpha}_e(\mathbf{d}, y^c) \}. \quad (3.12)$$

On note que les paramètres du modèle info-gap dépendent du niveau de performance exigée et qu'il faudrait, en théorie, un modèle info-gap à chaque niveau de performance exigée. Cependant, les exemples que l'on a traités montrent, qu'en général, on obtient de faibles variations sur la valeur de  $\mathbf{d}^*$  lorsque  $y^c$  évolue.

### Illustration sur un cas théorique

On illustre les étapes de calibration de modèle d'incertitude par un cas théorique. On étudie la robustesse de la réponse d'un système masse-ressort à 2 ddl vis-à-vis d'une méconnaissance sur les paramètres de masse et de raideur (notés respectivement  $m$  et  $k$ ), dont les valeurs nominales sont respectivement notées  $m^0$  et  $k^0$ . On considère connaître parfaitement la valeur de l'amortissement  $c$ . On a donc  $\dim(\mathbf{x}) = 2$ . On se reportera au tableau 3.2 pour les valeurs numériques de ces paramètres. Comme indiqué sur la figure 3.5, un effort d'amplitude 1 N est appliqué sur le ddl 1.

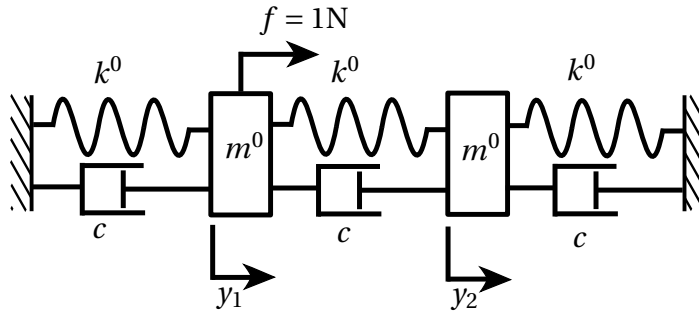


FIG. 3.5: Système masse-ressort-amortissement à 2 ddl

Pour cette illustration, on se place dans le cadre général d'une analyse de robustesse info-gap<sup>4</sup>. Les différents éléments info-gap sont les suivants :

- le modèle du système est la relation entre les paramètres incertains, notés  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{k}{k^0} & \frac{m}{m^0} \end{bmatrix}$

4. On rappelle qu'ici, ce ne sont plus les modes que l'on considère comme incertain mais la raideur et la masse.

Paramètres	Raideur $k^0$	Masse $m^0$	Amortissement $c$
Valeurs	$10^3 \text{ N.m}^{-1}$	1 kg	1 N.s.m <sup>-1</sup>

TAB. 3.2: Paramètres du système à 2 ddl

et l'amplitude maximum de la réponse qui est calculée directement par :

$$\mathcal{M}(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \max_{\omega \in \Omega} \|\mathbf{y}(\omega)\|_{\infty} = \max_{\omega \in \Omega} \|(-\omega^2 \mathbf{M} + j\omega \mathbf{C} + \mathbf{K})^{-1} \mathbf{f}\|_{\infty}, \quad (3.13)$$

avec  $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} & c \end{bmatrix}$ , les paramètres du modèle du système constitués du vecteur force  $\mathbf{f}$  et de la valeur de l'amortissement  $c$ ,  $\|\cdot\|_{\infty}$  la norme infinie, la bande fréquentielle d'intérêt  $\Omega = [0; 10]$  Hz et :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2c & -c \\ -c & 2c \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

- le modèle de prise de décision porte sur la réponse d'intérêt du système et exige que l'amplitude du système ne dépasse pas une valeur seuil :

$$\mathcal{M}(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \leq y^c. \quad (3.15)$$

- le modèle d'incertitude utilisé est le modèle ellipsoïdal défini de la manière suivante :

$$\mathcal{U}(\alpha, \mathbf{x}^0) = \left\{ \mathbf{x} : (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)^T \mathbf{W} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) \leq \alpha^2 \right\} \subseteq \mathbb{R}^2, \quad (3.16)$$

avec  $\mathbf{x}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$  et  $\mathbf{W}$  définie comme une matrice diagonale :

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \frac{1}{w_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{w_2^2} \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad (w_1, w_2) \in (\mathbb{R}_+^*)^2. \quad (3.17)$$

Le modèle  $\mathcal{U}(\alpha, \mathbf{x}^0)$  décrit donc une ellipsoïde dont le centre est  $\mathbf{x}^0$  et de longueurs de demi-axes  $w_1\alpha$  et  $w_2\alpha$ .

L'objectif de cette illustration est d'expliciter comment on va construire les coefficients  $w_1$  et  $w_2$  de  $\mathbf{W}$  en fonction de l'information disponible. Dans ce cas, on a :

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

*A priori*, on ne dispose d'aucune information : on prend initialement  $w_1 = w_2 = 1$  afin de ne privilégier aucune direction. Ainsi, on a :

$$\mathbf{d}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

Le modèle d'incertitude est alors un disque de rayon  $\alpha$ , dont le centre est  $\mathbf{x}^0$ . Avec ces éléments, on obtient la courbe de robustesse représentée sur la figure 3.6 (à gauche). À titre d'illustration, si l'on considère que  $y_1^c = 0.02$  m est la valeur seuil à ne pas dépasser, on obtient le domaine de variation des paramètres  $k$  et  $m$  robustes, représenté sur la figure 3.6 (à droite). On a donc

$$\mathbf{x} \in \mathcal{U}(\hat{\alpha}(y_1^c), \mathbf{x}^0) \Rightarrow \mathcal{M}(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \leq y_1^c, \quad (3.20)$$

ce qui signifie que tous les points à l'intérieur de ce domaine fournissent une amplitude de réponse inférieure à  $y_1^c$ . On notera que la relation (3.20) n'est pas une relation d'équivalence (seulement une implication) : il est possible de trouver  $\mathbf{x} \notin \mathcal{U}(\hat{\alpha}(y_1^c), \mathbf{x}^0)$  tel que  $\mathcal{M}(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \leq y_1^c$ , comme nous pourrions le voir sur la figure 3.7.

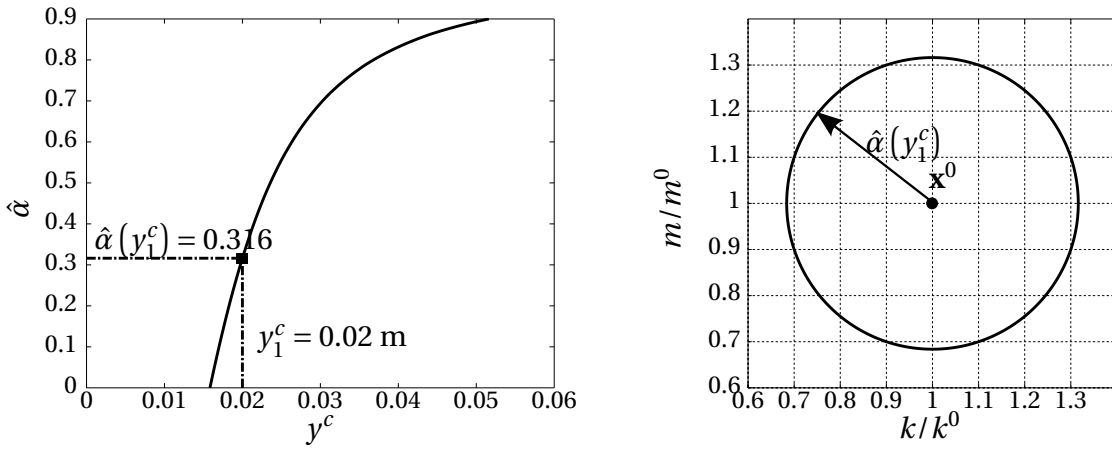


FIG. 3.6: Courbe de robustesse (à gauche) et domaine robuste (à droite) quand  $y^c = y_1^c$

On suppose, ensuite, que l'on a à disposition  $n = 9$  résultats d'essais dont les variations et les numéros  $i$ , avec  $i \in \{1, \dots, n\}$ , identifiants les essais sont représentés sur la figure 3.7. Avec cette quantité d'information, on ne peut clairement pas construire de distribution probabiliste. Néanmoins, on peut utiliser cette information pour calibrer le modèle d'incertitude info-gap  $\mathcal{U}(\alpha, \mathbf{x}^0)$ .

La figure 3.7 nous indique que la variation observée sur  $k$  est plus importante que celle sur  $m$  : le modèle d'incertitude construit avec  $\mathbf{d}^0$  ne tient pas compte de cette disparité. À chaque donnée d'essai  $\mathbf{x}_i^t$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on peut calculer une valeur de performance correspondante - notée  $y_i^t$  - en utilisant le modèle du système (équation (3.13)). La figure 3.8 représente les couples  $(y_i^t, \Gamma(\mathbf{x}_i^t, \mathbf{d}^0))$  - où chaque identifiant d'essai a également été reporté - ainsi que la courbe de robustesse nominale. Par exemple, si  $y_1^c = 0.02$  m est la valeur seuil à ne pas dépasser, les  $n$  données fournissent une valeur de performance en dessous de  $y_1^c$ , et la robustesse empirique est alors, dans ce cas, la plus grande valeur de la fonction gap, soit

$\hat{\alpha}_e(\mathbf{d}^0, y_1^c) \approx 0.34$ . Si, maintenant, on considère que  $y_2^c = 0.017$  m est la valeur seuil à ne pas dépasser, alors l'assertion de régularisation, écrite dans l'équation (3.11) «  $\mathcal{M}(\mathbf{q}, \mathbf{x}) \leq y^c$  » est activée et on obtient alors  $\hat{\alpha}_e(\mathbf{d}^0, y_2^c) \approx 0.07$ , comme indiqué sur la figure 3.8.

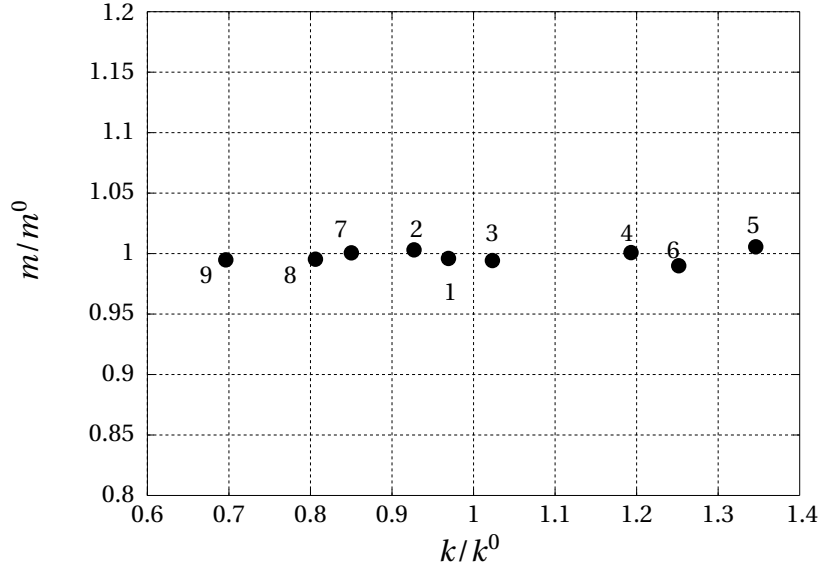


FIG. 3.7: Variation observée de  $k$  et  $m$

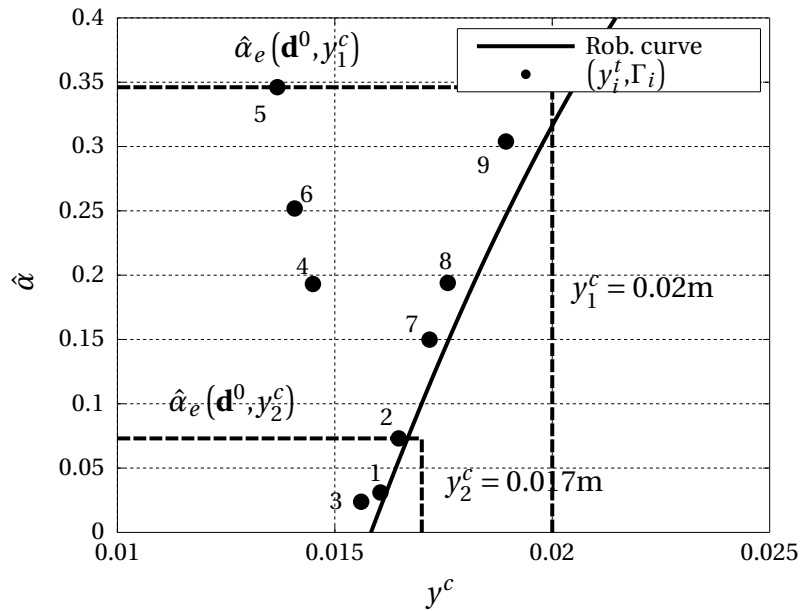


FIG. 3.8: Courbe de robustesse et données -  $\Gamma_i = \Gamma(\mathbf{u}_i^t, \mathbf{d}^0)$

Afin d'obtenir les paramètres optimaux du modèle d'incertitude info-gap, on fixe arbitrairement une valeur de performance  $y_2^c = 0.017$  m. L'objectif est donc de calibrer  $\mathcal{U}(\alpha, \mathbf{x}^0)$



en ajustant la forme de l'ellipsoïde. On considère l'aire de l'ellipsoïde comme étant fixe : l'aire de l'ellipsoïde est  $S = \pi w_1 w_2 \alpha^2$ . Comme c'est la forme et non l'aire de l'ellipsoïde qu'il faut optimiser, on va faire varier  $w_1$  et ajuster  $w_2$  de manière à avoir  $w_2 = \frac{1}{w_1}$ . La figure 3.9 montre la robustesse empirique en fonction de  $w_1$  lorsque la valeur seuil est  $y_2^c$ . Partant des paramètres initiaux  $\mathbf{d}^0$ , la robustesse empirique diminue car la variation de la forme de l'ellipsoïde améliore le modèle d'incertitude (la fonction *gap* diminue également). Le minimum de la robustesse empirique est obtenu en  $\mathbf{d}^*$  lorsque  $w_1 = 3.78$  et  $w_2 = \frac{1}{3.78}$ . Ensuite, la robustesse empirique augmente, pour  $w_1 \in [3.78; 5]$  car l'ellipsoïde est devenue trop fine dans l'axe de variation de  $m$  et la seule façon de garder les données est d'augmenter l'horizon d'incertitude empirique.

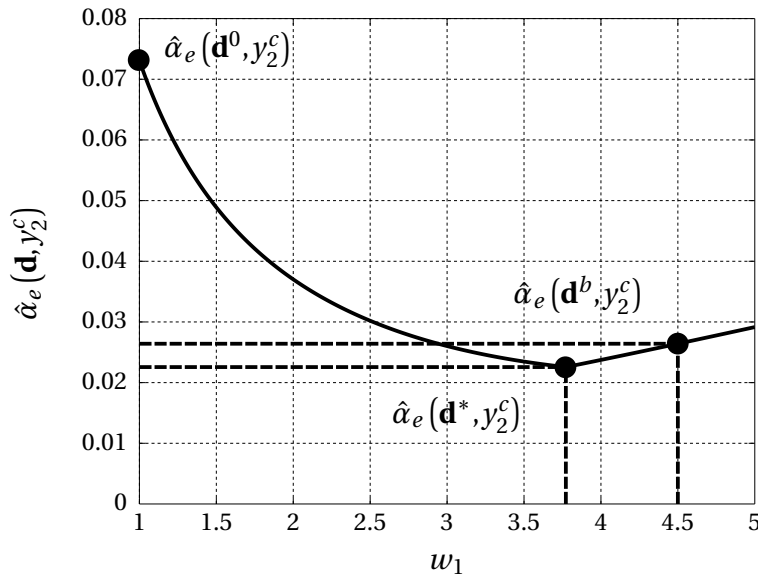


FIG. 3.9: Robustesse empirique en fonction de  $w_1 = \frac{1}{w_2}$

Finalement, la figure 3.10 (à gauche, en pointillés) présente la courbe de robustesse calculée avec le modèle d'incertitude calibré ainsi que le domaine robuste de variation (à droite, en pointillés) lorsque la valeur seuil est  $y_1^c = 0.02$  m. Cette courbe de robustesse est évidemment une représentation plus réaliste de la variation de  $k$  et  $m$  suggérée par la figure 3.7 que la courbe de robustesse initialement calculée.

Le domaine de variation robuste fournissant une amplitude de réponse inférieure à  $y_1^c$  comprend désormais l'essai numéro 5, alors qu'avec le modèle d'incertitude initial ce point n'appartenait pas au domaine robuste. Lorsque nous disposons d'information - même faiblement - il serait intéressant d'appliquer systématiquement cette démarche : ceci permettrait notamment de donner plus de crédit aux courbes de robustesse. Cet exemple théorique permet d'illustrer les étapes nécessaires pour calibrer un modèle d'incertitude info-gap lorsque de l'information est disponible. On notera que la stratégie de calibration de modèles d'in-

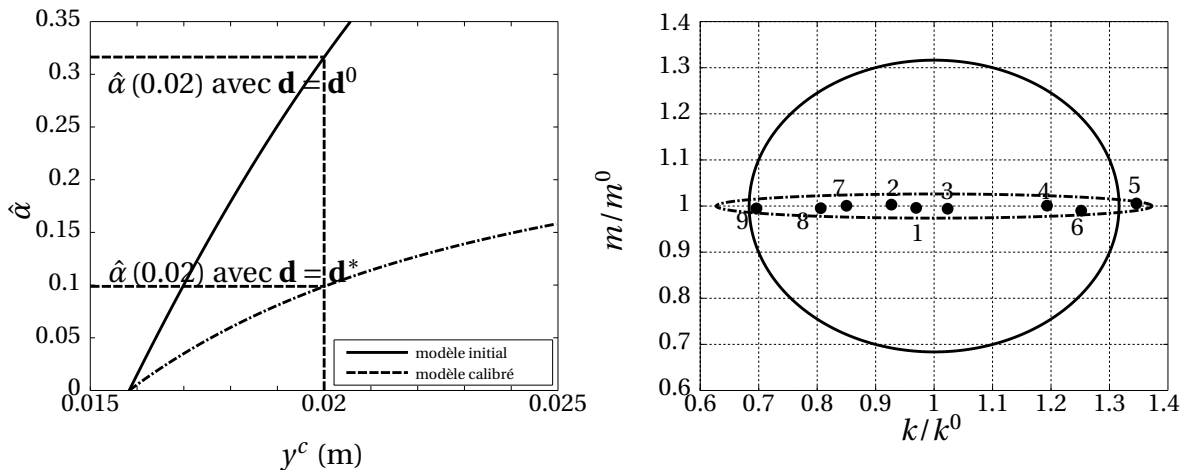


FIG. 3.10: Courbes de robustesse (à gauche) et domaine robuste avec les données (à droite) lorsque  $y^c = 0.02\text{m}$ . La ligne en trait plein (resp. pointillé) représente le modèle d'incertitude initial (resp. calibré)

certitude est également illustrée à la section 3.3.2 en utilisant des mesures non-simulées.

### 3.3 Validation de la méthodologie

On propose, dans cette section, de valider la méthodologie proposée, à savoir, appliquer l'indicateur sur un système réel sur lequel on « maîtrise » l'incertitude et calibrer un modèle d'incertitude existant à partir de données expérimentales non-simulées. On va appliquer la méthodologie sur une structure simplifiée de panneaux solaires (cf. figure 3.11). L'incertitude sur cette structure sera introduite en ajoutant des masselottes sur le système, les valeurs et le positionnement des masselottes étant aléatoires : on dispose de 31 configurations en plus d'une configuration nominale. Par cet ajout, l'objectif est de vérifier dans quelle mesure la courbe de robustesse est capable de prédire les niveaux de réponse en prenant en compte l'impact de cette incertitude sur le modèle modal identifié initial.

Dans la partie 3.3.1, on présente le montage expérimental ainsi les résultats d'identification modale pour toutes les configurations dans l'objectif de présenter, dans la partie 3.3.2, la calibration du modèle d'incertitude à partir d'un sous-ensemble de données d'essais. Finalement, les principaux résultats sont montrés dans la partie 3.3.3.

### 3.3.1 Simulation de la variabilité sur les solutions propres

#### Présentation du système

Le système étudié est une structure simplifiée de panneaux solaires (cf. figure 3.11). Cette structure est composée de deux plaques de  $700 \times 440 \times 5 \text{ mm}^3$  en aluminium reliées ensemble à une extrémité avec un serre-joint (*Clamp*) et le long des plaques avec trois points de fixation (*Stack*). Le système est testé en configuration libre<sup>5</sup>. Les essais sont réalisés en utilisant un pot vibrant comme moyen d'excitation - afin de s'affranchir des incertitudes concernant la localisation et l'amplitude de l'effort d'excitation - et en utilisant 10 capteurs piézo-électriques (cf. Fig. 3.11). Le système d'acquisition utilisé est NetdB<sup>®</sup> commercialisé par la société Métravib et comporte 12 voies.

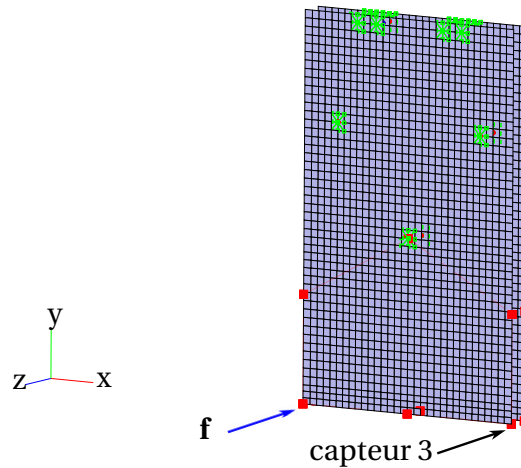
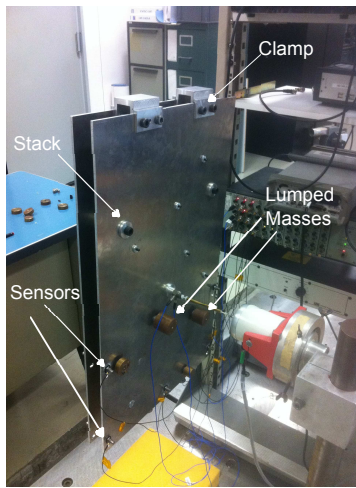


FIG. 3.11: Montage expérimental      FIG. 3.12: Position des capteurs et de l'effort appliqué

#### Identification modale et variabilité des solutions propres

On dispose donc d'une configuration nominale et de 31 configurations perturbées avec ajout de masselottes. On notera que la configuration nominale a été choisie de façon à être un modèle modal moyen, comme l'atteste la figure 3.14. La démarche d'identification modale n'est pas présentée dans cette section, on pourra se reporter à l'annexe B pour avoir plus de détails. L'objectif est de suivre la même démarche d'identification modale la plus rigoureuse possible pour les 32 configurations afin de pouvoir considérer que la variabilité des solutions propres n'est que la résultante de modification du système par les masselottes.

5. Dans l'identification modale, on se sera assuré que les modes de suspension ne viennent pas perturber l'obtention des premiers modes déformables.

À titre d'information, les perturbations en masses apportées au système sont de l'ordre de 6,27% de masse ajoutée en plus en moyenne (écart-type de 0.64%). Les changements dans les vecteurs propres sont présentés sur la figure 3.13. Le MAC (*Modal Assurance Criterion*, cf. [6]) est un critère classique en dynamique des structures pour évaluer la corrélation entre deux vecteurs : on l'utilise pour comparer les déformées propres perturbées avec celles du système initial. On restreint la comparaison aux cinq premiers modes. En considérant la déformée propre du système initial comme étant la déformée propre de référence, la figure 3.13 montre la moyenne (à gauche) et l'écart-type (à droite) du MAC réalisé entre les déformées propres du système perturbé et celles du système initial. Le nombre dans les valeurs diagonales du MAC correspond au nombre de déformées propres du système perturbé pseudo-appariés avec les déformées propres du système initial (critère de pseudo-appariage très bas = 0.1 afin de prendre un maximum de modes dans l'évaluation de la moyenne et de l'écart-type). On remarque, donc, que les deux premiers modes semblent peu affectés par les modifications en masse apportées au système, contrairement aux modes 3,4 et 5 qui exhibent à la fois un plus grand écart en moyenne et à la fois une plus grande variabilité (plus grand écart-type). La comparaison des pôles (fréquences propres et taux d'amortissement

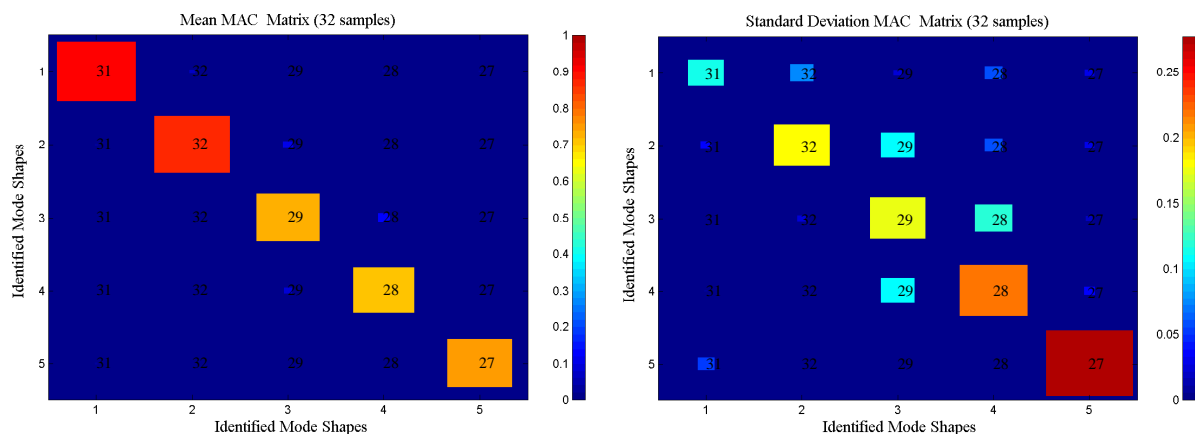


FIG. 3.13: Variation des 5 premiers modes propres (moyenne (gauche) et écart-type (droite)).

modaux) est possible uniquement lorsque les vecteurs propres sont appariés : on considère que deux vecteurs propres sont appariés si leur MAC est supérieur à 0,7. On utilise donc ce critère pour déterminer les erreurs sur les fréquences propres et taux d'amortissement modaux. On étudie les erreurs sur les cinq premiers modes qui sont regroupés dans les tableaux 3.3 et 3.4.

Finalement, au lieu de chercher à exhiber la variabilité des solutions propres, on peut superposer, pour un point donné et une configuration donnée, les FRFs synthétisées sur la base des modes normaux (cf. Fig. 3.14). La comparaison est, cependant, possible uniquement si les modes normaux ont été normalisés par rapport à la masse modale, fournie par la

Mode	Amortissement initial	Modes appariés (sur 31)	Min	Max	Amortissement moyen	Écart-type
1	0.25	27	0.14	0.55	0.29	0.09
2	0.27	29	0.13	0.47	0.28	0.08
3	0.33	20	0.25	0.53	0.34	0.06
4	0.25	17	0.20	0.53	0.30	0.09
5	0.11	22	0.06	2.6	0.58	0.6

TAB. 3.3: Variations sur le taux d'amortissement modal

Mode	Fréquence initiale (Hz)	Modes appariés (sur 31)	Min (Hz)	Max (Hz)	Fréquence moyenne (Hz)	Écart-type(Hz)
1	31.6	27	26.6	32.2	28.9	1.9
2	45	29	36.9	59	44.3	5.3
3	57.7	20	43.5	59.6	54.1	5.1
4	61.9	17	58	62.1	60.5	1.4
5	119.5	22	98.6	145.3	115.8	9.1

TAB. 3.4: Variation sur les fréquences propres

FRF ponctuelle (cf. annexe B pour la démarche de normalisation).

### 3.3.2 Construction et calibration du modèle d'incertitude

On dispose d'un ensemble de 31 solutions propres identifiées, correspondant chacune à une configuration dans laquelle nous avons placé des masselottes dont la valeur, la position et le nombre sont inconnus. On va utiliser un sous-ensemble ( $n = 10$ ) de ces 31 solutions propres, que l'on regroupera dans l'ensemble  $\mathcal{X}^t$ , pour calibrer le modèle d'incertitude. Le reste des essais sera utilisé pour vérifier la pertinence de la courbe de robustesse obtenue avec le modèle d'incertitude calibré.

Comme indiqué dans la section 3.2.1, on considère qu'il est possible de représenter l'incertitude dans les solutions propres en utilisant le modèle d'incertitude défini à l'équation (3.6). Par ailleurs, on dispose de  $n$  essais nous permettant ainsi d'obtenir  $\mathbf{x}_i^t$  avec  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Le paramètre de calibration associé à ce modèle d'incertitude est le vecteur de pondération, donc, avec les notations introduites en section 3.2.3, on a  $\mathbf{d} = \mathbf{w}$ . En théorie, on pourrait obte-

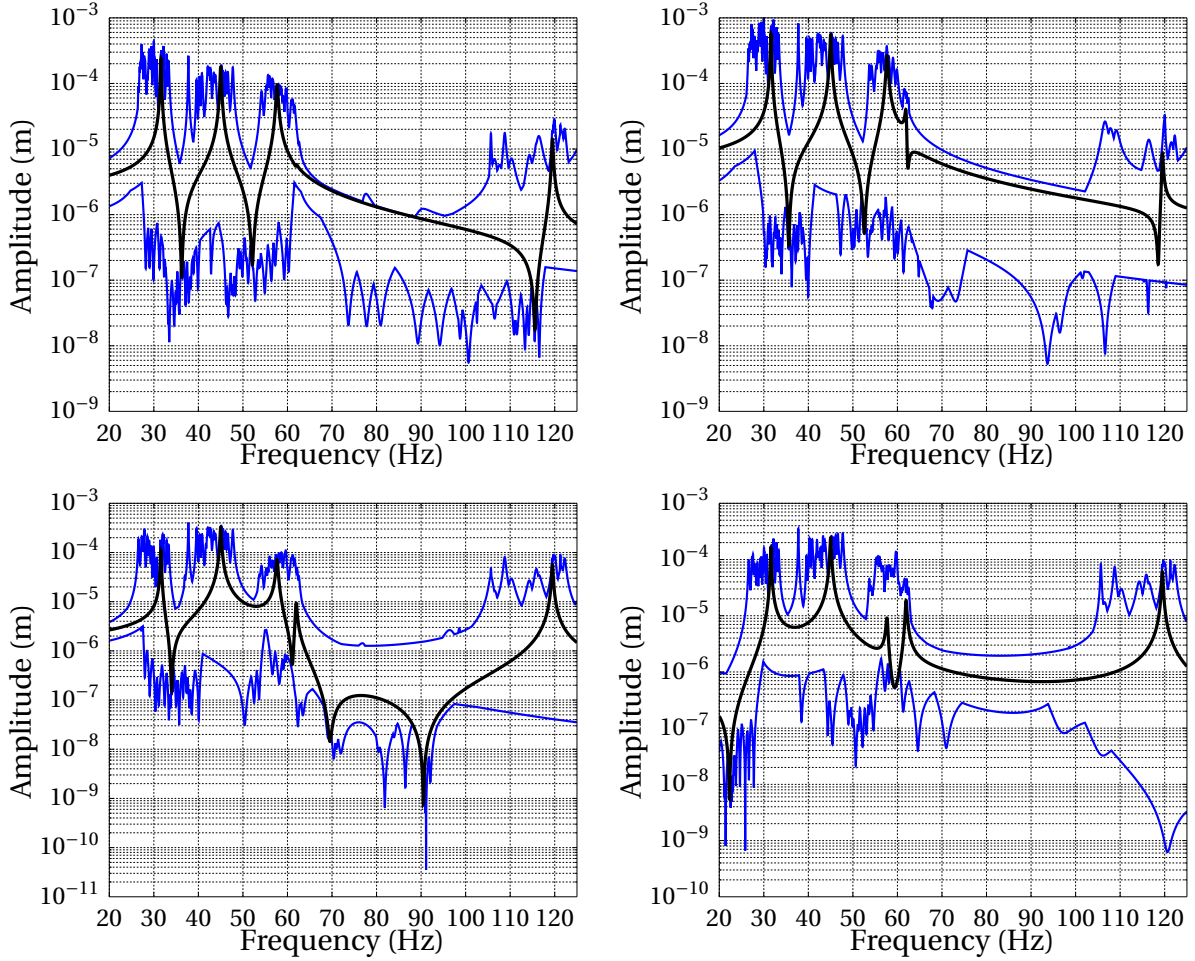


FIG. 3.14: Enveloppe des synthèses de modes normaux normalisée en différents points de la structure

nir un vecteur de pondération pour chaque quantité propre (taux d'amortissement modal, fréquence et vecteur propres) et pour chaque mode. Face au peu de données que l'on a à disposition, on va faire l'hypothèse que le vecteur de pondération est constant pour tous les modes. Ainsi, les paramètres de calibration sont

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} w_\omega & w_\xi & w_\phi \end{bmatrix}, \quad (3.21)$$

avec  $(w_\omega, w_\xi, w_\phi) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$ .  $w_\omega$  est le poids de pondération que l'on affecte aux fréquences propres incertaines,  $w_\xi$  est le poids de pondération que l'on affecte aux taux d'amortissement modaux et  $w_\phi$  est le poids de pondération que l'on affecte aux vecteurs propres. Puisque ce n'est pas la valeur exacte de  $\hat{\alpha}$  qui est intéressante, mais bien la forme de la courbe de robustesse et les valeurs critiques de solutions propres pour lesquelles la réponse devient importante, on fixe  $w_\omega = 1$ . On va donc chercher à obtenir  $w_\xi$  et  $w_\phi$  à partir des solutions

propres identifiées dans le sous-ensemble d'essai  $\mathcal{X}^t$ . Le vecteur  $\mathbf{d}^0$  initial est

$$\mathbf{d}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

Dans la section 3.3.3, on va présenter les résultats permettant de valider l'analyse de robustesse des réponses dynamiques.

### 3.3.3 Résultats

L'objectif, ici, est de calculer une courbe de robustesse permettant d'évaluer l'impact des méconnaissances autour de la base modale du système de référence sur le maximum des niveaux de réponses sur la bande fréquentielle  $\Omega = [20; 120]$  Hz. Pour chaque niveau d'incertitude, la réponse est calculée sur la base des modes propres extraits et correspond à la réponse à un effort ponctuel appliqué à un coin des plaques comme indiqué sur la figure 3.12. Cette réponse est observée uniquement au capteur 3 également représenté sur la figure 3.12.

La première étape est, donc, de calculer la robustesse empirique en s'appuyant sur la fonction *gap*. Pour calculer la robustesse empirique, on prend volontairement une valeur de  $y^c$  grande afin que l'assertion de régularisation filtre le moins de données :  $y^c = 1$  mm. En effet, les résultats d'identification modale ne nous montrent pas la présence de données aberrantes. Pour chaque essai  $i$  obtenu, il est possible de calculer une valeur de performance associée en utilisant l'équation (3.4) et notée  $y_i^t$ . De façon similaire à la figure 3.8, la figure 3.15 présente les couples  $(y_i^t, \Gamma(\mathbf{x}_i^t, \mathbf{d}^0))$  pour toutes les données d'essais. On précise, ici, la distinction entre les essais que l'on utilisera pour la calibration du modèle d'incertitude  $\mathbf{x}_i^t \in \mathcal{X}^t$  et ceux que l'on utilisera, uniquement une fois la courbe de robustesse obtenue, pour en vérifier sa pertinence. Pour la valeur de  $y^c$  donnée précédemment<sup>6</sup>, on obtient la robustesse

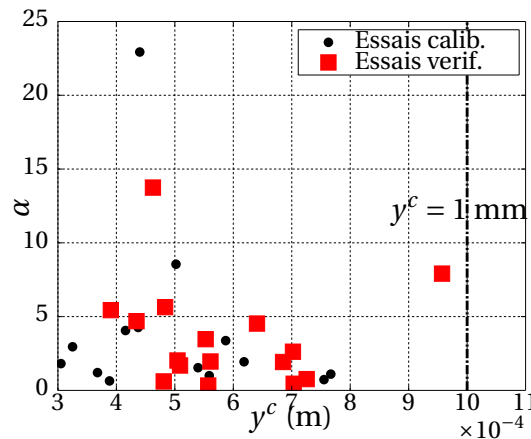


FIG. 3.15: Couples  $(y_i^t, \Gamma(\mathbf{x}_i^t, \mathbf{d}^0))$  avant calibration



empirique représentée sur la figure 3.16. Sous les conditions définies précédemment, les pa-

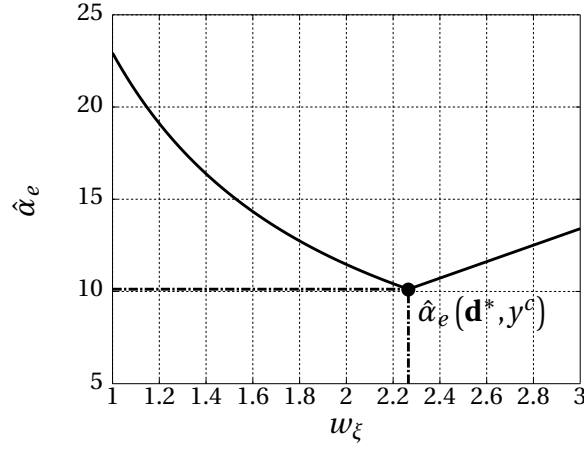


FIG. 3.16: Robustesse empirique en fonction de  $w_\xi = \frac{1}{w_\phi}$

ramètres optimaux sont donc trouvés et ont pour valeur :

$$\mathbf{d}^* = \left[ 1 \quad 2,26 \quad \frac{1}{2,26} \right]. \quad (3.23)$$

La calibration du modèle d'incertitude permet donc d'aboutir à un poids de pondération plus élevé pour les taux d'amortissement modaux que pour les fréquences propres et les vecteurs propres. Ces valeurs nous semblent cohérentes avec la variabilité exhibée par les différentes configurations et explicitée en section 3.3.1. Avec ces paramètres, la courbe de robustesse, calculée dans l'intervalle  $\mathcal{J} = [0; 0.4]$  et tracée sur la figure 3.17, permet de visualiser l'impact des méconnaissances du modèle modal sur les niveaux de réponses.

Ce cas-test mérite quelques commentaires. Sur ce système, on observe que la courbe de robustesse semble évaluer des niveaux de réponses beaucoup plus élevées que ceux observées expérimentalement. Cela ne signifie pas forcément que la courbe de robustesse surévalue les niveaux de réponses. La disposition des masselottes n'a visiblement pas permis d'obtenir des configurations critiques c'est à dire permettant de mettre en défaut la courbe de robustesse. Effectivement, on s'est placé dans des cas expérimentaux peu pénalisants au regard du critère de performance étudié dans cette analyse de robustesse, ce qui permet d'expliquer la forte concentration des configurations à horizon d'incertitude élevé mais niveaux de réponse faible. Cependant, l'exemple traité permet de valider l'utilisation de la courbe de robustesse comme indicateur d'aide à la décision rapide pour évaluer la maximum des niveaux de réponse lorsque la base modale est incertaine. On aurait, par exemple, pu remettre en cause cette utilisation si nous avions trouvé des configurations expérimentales fournis-

6. Ici aussi, si d'autres valeurs de  $y^c$  sont considérés, alors on obtient sensiblement le même paramètre optimal.



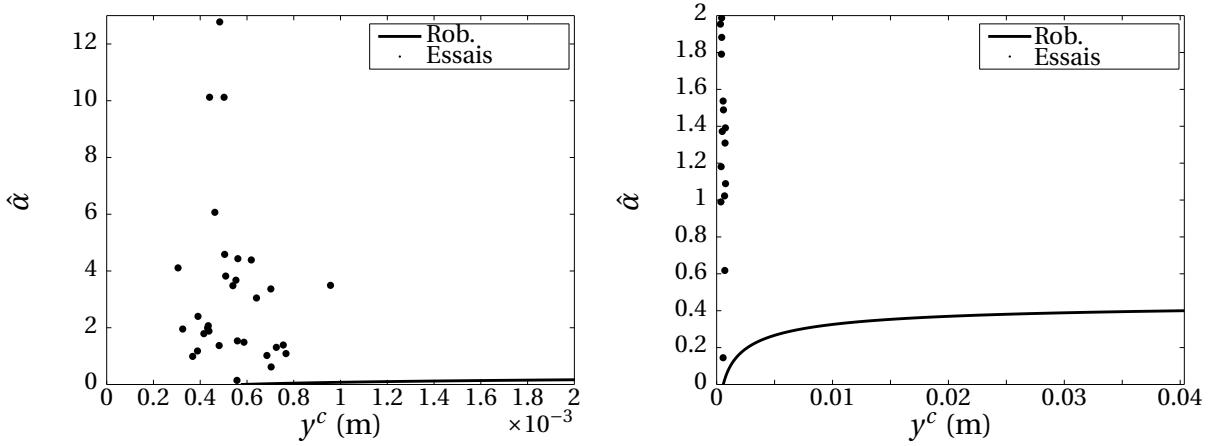


FIG. 3.17: Courbe de robustesse (zoom sur la figure de droite)

sant des niveaux de réponses plus importants que ceux obtenus avec la courbe de robustesse pour un même niveau (horizon) d'incertitude, ce qui n'est pas le cas dans l'exemple traité.

### 3.4 Application sur des mesures réelles d'alternateur

L'objectif de cette section est d'illustrer l'utilisation de l'indicateur sur l'identification de mesures réelles d'alternateur. À titre d'illustration, on dispose d'un ensemble de  $m = 8$  modes propres identifiées, le maillage expérimental étant présenté sur la figure 3.19. Nous ne détaillerons pas la démarche d'identification, la démarche étant sensiblement équivalente à celle exposée en annexe B en dehors du passage modes complexes modes réels<sup>7</sup>. Les modes propres ainsi que la projection de l'effort sur le maillage expérimental seront présentés dans la section 3.4.1 et les courbes de robustesses seront présentées à la section 3.4.2.

#### 3.4.1 Présentation du système

On considère les 8 modes propres identifiées suivants autour de la fréquence d'excitation de 100 Hz (cf. figure 3.18) présents dans la bande fréquentielle d'intérêt  $\Omega = [85; 115]$  Hz. On étudie la réponse à un effort radial d'amplitude  $f = 100$  kN comme indiqué sur la figure 3.19.

Les niveaux obtenus ne sont pas représentatifs de ce que l'on peut obtenir car les termes de correction statique ne sont pas inclus dans le calcul de la réponse par projection sur base modale : seul le comportement dynamique est évalué. On applique donc l'analyse de robustesse de la réponse à l'effort radial telle que développée dans la section 3.2.1.

7. Au lieu d'une simple rotation, on projette la direction principale, obtenue par une décomposition en valeurs singulières, du mode complexe sur l'axe des réels puis on projette le mode complexe sur l'axe des réels.

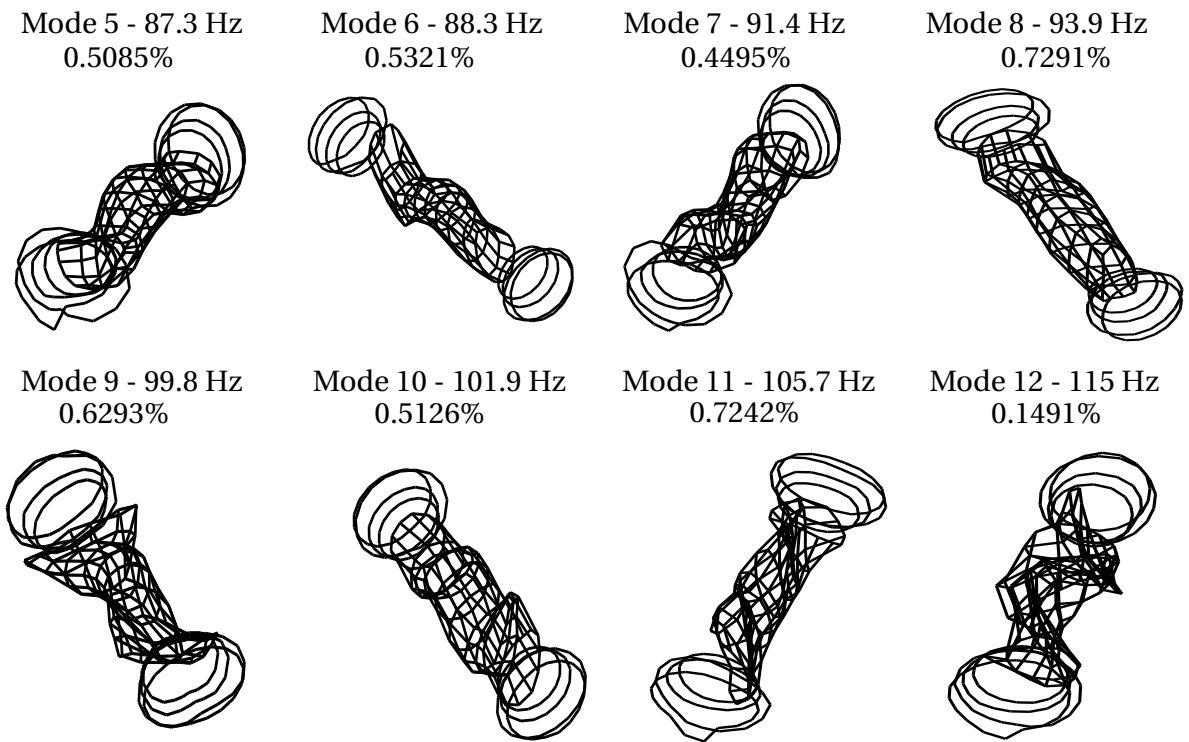


FIG. 3.18: Sous-ensemble de modes propres identifiées d'alternateur

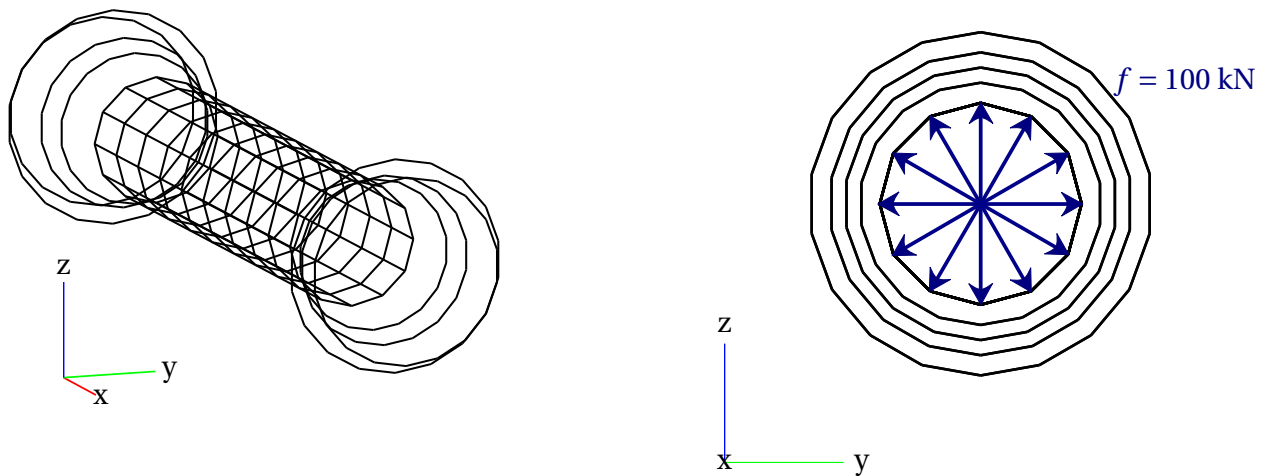


FIG. 3.19: Maillage expérimental (gauche) et effort appliqué sur le circuit magnétique (vue yz)

### 3.4.2 Résultats

Concernant, le choix du vecteur de pondération, on sait, par expérience, que les masses modales (norme des modes propres) et les taux d'amortissements modaux sont les deux quantités les plus difficilement identifiables expérimentalement : on va donc leur affecter un coefficient de pondération plus important que ceux concernant les fréquences de résonance. On utilise un vecteur de pondération  $w_i = 0.1, \forall i \in \{1, \dots, m\}$  et  $w_i = 1, \forall i \in \{m+1, \dots, p\}$ . La courbe de robustesse est calculée dans l'intervalle  $\mathcal{J} = [0; 0.2]$  avec un horizon d'incertitude par pas de  $\hat{\alpha}_j = 0.001$ .

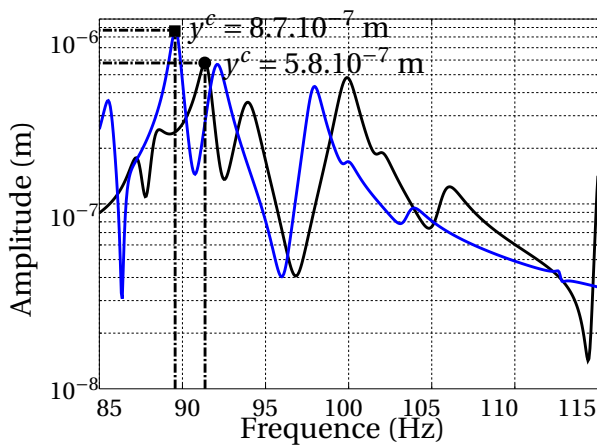


FIG. 3.20: Réponse fréquentielle

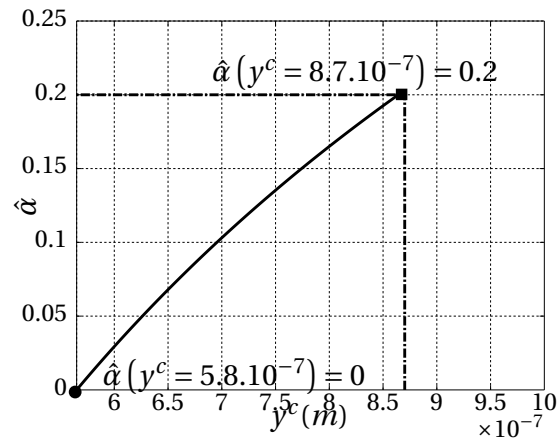


FIG. 3.21: Courbe de robustesse

La réponse initiale est tracée en noir sur la figure 3.20, le maximum de l'amplitude de la réponse en déplacement sur la bande fréquentielle  $\Omega$  est alors obtenue au voisinage du mode 7, à une fréquence d'environ 91,4 Hz. Lorsque l'incertitude dans le modèle modal augmente, on obtient la courbe de robustesse<sup>8</sup> représentée sur la figure 3.21 qui exprime le maximum de l'amplitude de la réponse en déplacement en fonction de l'horizon d'incertitude. La réponse fréquentielle, en bleu sur la figure 3.20, représente la réponse obtenue lorsque l'horizon d'incertitude est de 0.2 : cette réponse représente le pire-cas possible, pour le maximum de l'amplitude de la réponse en déplacement, lorsque les solutions propres évoluent suivant l'équation (3.6) avec  $\alpha = 0.2$ .

## 3.5 Bilan

L'indicateur proposé a pour objectif d'évaluer la robustesse de la réponse dynamique vis-à-vis du comportement dynamique incertain. L'incertitude dans le comportement dyna-

8. La courbe de robustesse est calculée avec l'approche semi-analytique décrite section A.3

mique est traduite par une incertitude sur les solutions propres en supposant que le modèle modal incertain dérive du modèle modal initial. Un modèle d'incertitude, basé sur le cadre info-gap, est défini et l'objectif de l'indicateur est d'évaluer le niveau d'incertitude que l'on peut tolérer sur le modèle modal sans que les niveaux de réponse en fonctionnement ne dépassent une certaine valeur critique. Cette approche, très générale, dépend naturellement des hypothèses de construction du modèle d'incertitude.

Pour améliorer la représentativité du modèle d'incertitude, une stratégie de calibration du modèle d'incertitude basée des données expérimentales est explicitée et illustrée sur des cas académiques et semi-industrielles.

Enfin, la stratégie est appliquée sur des solutions propres identifiées d'alternateur. Cependant, un inconvénient majeur est la restriction de l'approche à des systèmes avec peu de ddls (comme des maillages expérimentaux) car le modèle d'incertitude construit n'a pas pour vocation de représenter l'incertitude sur des solutions propres riches en information spatiale (comme des solutions propres d'un modèle EF). De plus, dans le cas traité, ici, on utilise une projection de l'effort sur le maillage expérimental, ce qui réduit la représentativité de l'approche. Dans le chapitre 4, on va étudier des méthodes d'expansion permettant d'une part de projeter l'effort numérique sur la base modale expérimentale et d'autre part d'obtenir une évaluation des niveaux de réponses sur tous les ddls du modèle EF (et plus seulement sur les ddls du maillage expérimental). L'opérateur d'expansion dépend du modèle EF, et on proposera une stratégie de calibration de modèle incertain basée sur l'approche info-gap.

---

# Expansion modale robuste en présence de méconnaissance

## Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction . . . . .</b>	<b>64</b>
<b>4.2</b>	<b>Expansion de mesures sur un modèle numérique . . . . .</b>	<b>64</b>
4.2.1	Expansion par projection sur une base . . . . .	65
4.2.2	Expansion par vérification des équations d'équilibre . . . . .	66
4.2.3	Expansion par minimisation d'un résidu en énergie . . . . .	68
4.2.4	Bilan . . . . .	69
<b>4.3</b>	<b>Erreur en relation de comportement étendue . . . . .</b>	<b>70</b>
4.3.1	Origine et formulation . . . . .	70
4.3.2	ERCE comme opérateur d'expansion . . . . .	72
4.3.3	Illustrations . . . . .	76
4.3.4	Bilan . . . . .	81
<b>4.4</b>	<b>Expansion modale robuste . . . . .</b>	<b>81</b>
4.4.1	Robustesse, fidélité et dispersion des prédictions . . . . .	82
4.4.2	Formulation . . . . .	83
4.4.3	Application académique . . . . .	85
4.4.4	Application industrielle . . . . .	90
<b>4.5</b>	<b>Bilan . . . . .</b>	<b>98</b>

---

## 4.1 Introduction

Comme nous avons pu l'indiquer dans le chapitre 1, la construction d'un modèle hybride permet d'évaluer les niveaux vibratoires en fonctionnement (cf. équation (1.9)). Le modèle hybride nécessite la construction de champs étendus qui sont obtenus par des méthodes d'expansion. L'objectif de ces champs étendus est double :

- ils doivent permettre de projeter l'effort numérique sur l'espace des modes propres expérimentaux identifiés ;
- ils doivent permettre d'obtenir les niveaux vibratoires sur tous les ddls du modèle EF à partir des déplacements généralisés.

Même si, en théorie, on pourrait utiliser deux types de vecteurs étendus (puisque'ils n'ont pas les mêmes objectifs), dans ce mémoire, on utilisera le même type vecteur étendu.

La section 4.2 propose un état de l'art sur les méthodes d'expansion. On verra notamment que les méthodes basées sur la minimisation d'une erreur basée sur les relations de comportement permettent de prendre en compte les erreurs dans le modèle pour obtenir les champs étendus. L'erreur en relation de comportement étendue fournira notre opérateur d'expansion et sera détaillée dans la section 4.3. Cependant, toutes les méthodes d'expansion dépendent de la capacité du modèle EF à reproduire le comportement dynamique observé. Dans le cas de l'alternateur, le modèle EF est non-validé ce qui signifie que ses prédictions ne permettent pas de reproduire de manière satisfaisante le comportement dynamique observé. À cet égard, la valeur réelle de nombreux paramètres est inconnue. C'est pourquoi, on proposera, dans la section 4.4, une stratégie de calibration visant à minimiser l'impact des paramètres incertains sur la qualité des vecteurs étendus : c'est la procédure d'expansion robuste.

## 4.2 Expansion de mesures sur un modèle numérique

De façon générale, les méthodes d'expansion visent à reconstruire des champs sur un modèle numérique à partir de données obtenues expérimentalement. En dynamique des structures, les données que l'on cherche à reconstruire sur un modèle EF sont souvent des modes propres ou des champs de déplacements. Les objectifs sont divers : reconstitution pour visualisation, pour la préparation d'essais adaptée à la calibration de modèle, pour l'identification d'endommagement, pour l'extrapolation des mesures aux ddls délicats à obtenir expérimentalement (ddls de rotation et/ou ddls internes), pour l'utilisation dans un modèle hybride. Telles qu'utilisées ici, les méthodes d'expansion sont utilisées pour construire un modèle hybride capable de projeter un effort numérique sur le maillage expérimental.

La littérature sur les méthodes d'expansion est abondante et nous ne prétendons pas fournir une liste exhaustive : le lecteur pourra, par exemple, trouver plus de détails dans [16, 17, 100]. Partant d'un modèle numérique - composé des matrices de raideur et de masse respectivement notées  $(\mathbf{K}, \mathbf{M})$  dont la dimension est  $N$  - et de  $m$  solutions propres identifiées sur  $c$  capteurs,  $(\omega_v^t, \phi_v^t)$  avec  $v \in \{1, \dots, m\}$ , les méthodes d'expansion visent à obtenir un champ étendu, noté  $\hat{\phi}_v \in \mathbb{R}^N$  avec  $v \in \{1, \dots, m\}$ , par le biais d'un opérateur d'expansion. Les méthodes d'expansion se différencient par la définition de cet opérateur ainsi que la définition de la fonction coût associée. Nous proposons, dans la suite, de classer les méthodes d'expansion en trois catégories :

- expansion par projection sur une base ;
- expansion par vérification des équations d'équilibre ;
- expansion par minimisation d'une norme énergétique.

##### 4.2.1 Expansion par projection sur une base

L'approche la plus naturelle pour obtenir des vecteurs étendus est de construire une matrice de passage entre le modèle EF et le maillage expérimental. Ainsi, les vecteurs étendus sont obtenus par projection sur une base, que l'on qualifie de base d'expansion. Soit  $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{N,p}$  avec  $p \ll N$ , la matrice utilisée pour obtenir le vecteur étendu  $\hat{\phi}_v \in \mathbb{R}^N$  du mode  $v$  identifié  $\phi_v^t \in \mathbb{R}^c$ , alors le vecteur étendu  $\hat{\phi}_v$  s'écrit comme

$$\hat{\phi}_v = \mathbf{T}\mathbf{p}, \quad (4.1)$$

avec  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^p$  les coordonnées généralisées du vecteur étendu dans la base d'expansion  $\mathbf{T}$ . Ce vecteur est obtenu en minimisant un résidu par les moindres carrées :

$$\mathbf{p} = \arg \min_{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^p} \left( \|\mathbf{\Pi T q} - \phi_v^t\|_2^2 \right), \quad (4.2)$$

avec  $\|\cdot\|_2$  la norme euclidienne et  $\mathbf{\Pi} \in \mathbb{R}^{c,N}$  la matrice de passage entre le maillage numérique et expérimental. Le vecteur  $\mathbf{p}$  fournit alors la meilleure représentation du vecteur étendu par les vecteurs de base formant  $\mathbf{T}$ . On obtient le vecteur étendu en utilisant la relation de reconstitution (4.1).

Il existe alors plusieurs approches pour construire la base de projection  $\mathbf{T}$ . Une première possibilité est de supposer que le mouvement varie linéairement entre deux capteurs connectés l'un à l'autre (expansion géométrique qualifiée de *wire-frame representation* [17]), le sous-espace  $\mathbf{T}$  correspond alors aux réponses linéaires le long de chaque connections à un déplacement unité de chaque capteur. On peut aussi interpoler le déplacement entre deux cap-



teurs par des splines [151]. Cependant, ces méthodes s'avèrent délicates à appliquer en présence de géométries complexes. Lorsqu'on utilise un sous-ensemble des modes propres numériques dans  $\mathbf{T}$ , on obtient alors la méthode d'expansion SEREP (*System Equivalent Reduction Expansion Process*) [111]. Comme les vecteurs étendus, obtenus par SEREP, s'écrivent comme une combinaison linéaire de modes propres, ils ont la propriété d'exhiber des déformées lissées ce qui permet d'atténuer les erreurs d'expansion. Afin d'améliorer la représentativité de la base d'expansion, on peut y rajouter des réponses statiques [27]. On notera que la méthode d'expansion modale (ou SEREP non-lissé) [109] adopte une formulation très proche de la méthode d'expansion SEREP à la différence près que les ddls expérimentaux sont conservés dans le vecteur étendu : cet ajout n'est pas forcément pertinent puisque, lors de l'identification, les modes propres expérimentaux sont toujours obtenus avec du bruit. Ces méthodes fonctionnent donc bien lorsque la base d'expansion est cohérente avec les réponses mesurées : par exemple, pour SEREP, on pourra simplement s'assurer que les modes propres numériques permettent de représenter les modes propres identifiés. En revanche, ces méthodes reposent sur le choix des réponses (modes) à inclure dans la base d'expansion et, à notre connaissance, il n'existe pas de méthodologies de vérification permettant d'indiquer la pertinence *a priori* d'une base donnée.

#### 4.2.2 Expansion par vérification des équations d'équilibre

Lorsque le modèle numérique, défini par les matrices  $(\mathbf{K}, \mathbf{M})$  dans le cas conservatif, représente bien le comportement dynamique de la structure, on peut utiliser la matrice de flexibilité dynamique pour forcer les vecteurs étendus à satisfaire l'équation d'équilibre dynamique : c'est la méthode d'expansion dynamique [72]. On partitionne<sup>1</sup> le vecteur étendu en deux parties

$$\hat{\boldsymbol{\phi}}_v = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\phi}}_v^t \\ \hat{\boldsymbol{\phi}}_v^2 \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

dans lesquelles  $\hat{\boldsymbol{\phi}}_v^t \in \mathbb{R}^c$  représente le vecteur  $v$  identifié expérimentalement ( $c$ , le nombre de capteurs) et  $\hat{\boldsymbol{\phi}}_v^2 \in \mathbb{R}^{N-c}$  représente les termes non-observés. Le vecteur étendu doit satisfaire l'équation d'équilibre, donc, suivant le partitionnement exprimé à l'équation (4.3), on a

$$\left( \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} - \omega_v^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\phi}}_v^t \\ \hat{\boldsymbol{\phi}}_v^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

avec  $\omega_v$ , la pulsation propre identifiée expérimentalement. L'équation (4.4) nous permet alors d'obtenir la partie non-observée du vecteur étendu

$$\hat{\boldsymbol{\phi}}_v^2 = -(\mathbf{K}_{22} - \omega_v^2 \mathbf{M}_{22})^{-1} (\mathbf{K}_{21} - \omega_v^2 \mathbf{M}_{21}) \hat{\boldsymbol{\phi}}_v^t. \quad (4.5)$$

1. Ce partitionnement est purement symbolique : en pratique, on doit définir des matrices de passage permettant la restriction des matrices du modèle à certains ddls.

Dans [56], la partie non-observée est obtenue par

$$\hat{\phi}_v^2 = - \begin{bmatrix} (\mathbf{K}_{12} - \omega_v^2 \mathbf{M}_{12}) \\ (\mathbf{K}_{22} - \omega_v^2 \mathbf{M}_{22}) \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} (\mathbf{K}_{11} - \omega_v^2 \mathbf{M}_{11}) \\ (\mathbf{K}_{21} - \omega_v^2 \mathbf{M}_{21}) \end{bmatrix} \hat{\phi}_v^t. \quad (4.6)$$

Le calcul de la pseudo-inverse  $\cdot^\dagger$  est effectué soit par SVD<sup>2</sup> soit par Moore-Penrose. L'expansion peut être simplifiée en formulant l'hypothèse que les forces d'inertie associées aux ddls non-observés sont négligeables. Partant de l'expansion dynamique formulée à l'équation (4.5), on obtient l'expansion statique [55] :

$$\hat{\phi}_v^2 = -\mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{K}_{21} \hat{\phi}_v^t. \quad (4.7)$$

Un terme correcteur  $t_d$  est ajoutée dans [110] pour limiter l'impact des termes d'inerties négligés. La partie non-observée est alors retrouvée avec

$$\hat{\phi}_v^2 = -(\mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{K}_{21} + t_d) \hat{\phi}_v^t. \quad (4.8)$$

On notera qu'il est également possible d'obtenir le vecteur étendu par minimisation des résidus en force ou en déplacement [90]. Ces méthodes forment l'hypothèse que le mouvement des ddls capteurs du vecteur étendu est exactement le même que le mouvement des ddls essais. En effet, avec les méthodes d'expansion dynamique, statique (avec ou sans correction), on a

$$\mathbf{\Pi} \hat{\phi}_v = \phi_v^t, \quad (4.9)$$

avec  $\phi_v^t$  la déformée propre expérimentale et  $\mathbf{\Pi} \in \mathbb{R}^{c,N}$  la matrice de passage entre les maillages numériques et expérimentaux permettant ainsi aux ddls numériques d'être projetés sur les ddls expérimentaux. Cela suppose donc que les vecteurs propres identifiés vérifient les équations d'équilibre (pour l'expansion dynamique). Comme avec la méthode SEREP non-lissé, l'ajout de cette contrainte n'est pas forcément pertinente car le processus d'identification expérimentale des solutions propres est inévitablement pollué par du bruit. Pour y remédier, il existe des versions des méthodes d'expansion relâchant cette contrainte en ajoutant un terme régularisant. Concernant l'expansion dynamique sans contrainte de vérification de l'équation d'équilibre, le champ étendu réalise le minimum de

$$g = \hat{\phi}_v^T (\mathbf{K} - \omega_v \mathbf{M}) \hat{\phi}_v + r (\mathbf{\Pi} \hat{\phi}_v - \phi_v^t)^T \mathbf{K}_R (\mathbf{\Pi} \hat{\phi}_v - \phi_v^t), \quad (4.10)$$

avec  $\mathbf{K}_R$  la matrice de raideur condensée aux ddls capteurs et  $r \in \mathbb{R}_+$  un paramètre de régularisation dépendant du niveau de bruit présent lors de l'identification. Suivant la valeur de ce paramètre, la relation (4.9) sera plus ou moins respectée. Le minimum de la fonction exprimée à l'équation (4.10) est obtenue lorsque

$$\frac{\partial g}{\partial \hat{\phi}_v} = 0, \quad (4.11)$$

---

2. acronyme de *Singular Value Decomposition* = Décomposition en Valeurs Singulières (cf. [52] par exemple).

ce qui revient à résoudre le système linéaire rectangulaire  $(N + c) \times N$  suivant :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} - \omega_v \mathbf{M} \\ r \mathbf{K}_R \mathbf{\Pi} \end{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\phi}}_v = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ r \mathbf{K}_R \boldsymbol{\phi}_v^t \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

On notera simplement que si  $r \rightarrow 0$  alors la relation (4.9) sera respectée et le minimum de  $g$  est obtenu par résolution de l'équation (4.4) avec  $\hat{\boldsymbol{\phi}}_v^t \rightarrow \boldsymbol{\phi}_v^t$ . Pour chaque mode à étendre, on doit donc résoudre un nouveau système (4.12), car  $\omega_v$  évolue, ce qui est coûteux, mais le vecteur étendu tient compte du comportement dynamique inertiel du mode.

Construite de manière équivalente (en considérant  $\omega_v = 0$ ), la méthode d'expansion statique sans contrainte d'égalité permet d'obtenir le champ étendu après résolution du système linéaire rectangulaire  $(N + c) \times N$  suivant :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} \\ r \mathbf{K}_R \mathbf{\Pi} \end{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\phi}}_v = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ r \mathbf{K}_R \boldsymbol{\phi}_v^t \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

On propose une comparaison du comportement des méthodes d'expansion statique et dynamique en présence de bruit en section 4.3.3.

### 4.2.3 Expansion par minimisation d'un résidu en énergie

Au lieu de forcer le vecteur étendu à satisfaire les équations d'équilibre, on peut relâcher cette condition pour obtenir un résidu que l'on traduit en terme d'énergie. En effet, le vecteur identifié étendu ne vérifie généralement pas l'équation d'équilibre à cause notamment des incertitudes (biais et variance) présentes lors de son obtention. D'autre part, une formulation en énergie a l'avantage de manipuler des grandeurs comparables contenant une seule dimension. En général, on a

$$(\mathbf{K} - \omega_v \mathbf{M}) \hat{\boldsymbol{\phi}}_v = \mathbf{f}_v \neq \mathbf{0}, \quad (4.14)$$

qui est homogène à une force dynamique résiduelle. Le déplacement statique dû à cette force est

$$\mathbf{x}_v = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f}_v. \quad (4.15)$$

On calcule ensuite l'énergie de déformation associée à ce résidu en déplacement, ce qui s'écrit

$$e_v = \mathbf{x}_v^T \mathbf{K} \mathbf{x}_v. \quad (4.16)$$

Le vecteur étendu est obtenu en minimisant l'énergie de déformation associée au déplacement résiduel  $\mathbf{x}_v$  :

$$\hat{\boldsymbol{\phi}}_v^* = \underset{\hat{\boldsymbol{\phi}}_v}{\operatorname{argmin}} e_v. \quad (4.17)$$

On obtient alors la formulation avec contrainte d'égalité de la MDRE (*Minimum Dynamic Residual Expansion*) [16]. La MECE (*Minimization of Error in Constitutive Equation*) [51, 69]

adopte une formulation très proche de la MDRE. Enfin, ces deux méthodes sont des cas particuliers de l'erreur en relation de comportement étendue (ERCE) [36, 122], erreur qui sera plus précisément décrite dans la section 4.3.

#### 4.2.4 Bilan

Nous avons divisé les principales méthodes d'expansion en trois catégories qui nous paraissent être légitimes. Il est, par ailleurs, possible de combiner les approches. Par exemple, on peut combiner une méthode d'expansion par minimisation d'un résidu énergétique avec celle par projection sur une base. Dans ce cas précis, on recherche le vecteur étendu minimisant le résidu énergétique associé et s'écrivant comme étant une combinaison linéaire des vecteurs constituant la base  $\mathbf{T}$ , ce qui s'écrit :

$$\mathbf{p}^* = \underset{\mathbf{p}}{\operatorname{argmin}} e_v \quad \text{avec} \quad \hat{\phi}_v = \mathbf{T}\mathbf{p}^*. \quad (4.18)$$

On procède donc à une réduction pour obtenir le vecteur étendu. Cette approche a par exemple été utilisée dans [37]. Finalement, dans le même état d'esprit que [17], nous proposons le tableau 4.1 visant à synthétiser les avantages et inconvénients des méthodes d'expansion.

Expansion par	Qualité du modèle EF	Bruit sur les mesures	Erreur de modèle	Choix <i>a priori</i>	Coût de calcul
Projection sur base	+	-	-	+	-
Vérification des équations d'équilibre	+	+	+	-	+
Minimisation d'un résidu en énergie	-	-	-	-	+

TAB. 4.1: Impact qualitatif (+ (resp. -) = grand (resp. faible) impact sur la qualité du vecteur étendu) de différentes situations suivant les méthodes d'expansion

Les méthodes d'expansion par minimisation d'un résidu en énergie présentent plusieurs avantages. Notamment, la qualité des vecteurs étendus ne dépend pas fortement d'un choix *a priori* comme c'est le cas pour les méthodes par projection sur base. Par ailleurs, comme nous pourrions l'illustrer dans la suite, la qualité des vecteurs étendus obtenus par minimisation d'un résidu énergétique dépend moins de la qualité du modèle EF que ceux obtenus par vérification des équations d'équilibre. Ces observations nous conduisent à étudier plus précisément une méthode par minimisation d'un résidu énergétique. Par sa formulation générale, nous allons détailler, dans la suite, l'erreur en relation de comportement.

## 4.3 Erreur en relation de comportement étendue

### 4.3.1 Origine et formulation

L'erreur en relation de comportement (ERC) a été proposée par Ladevèze [78] dans les années 70 comme un indicateur d'erreur visant à contrôler la qualité des solutions obtenues par discrétisation EF. Afin d'expliquer la construction de la fonction coût ERC, on rappelle brièvement le problème de référence que l'on cherche à résoudre dans le cadre de l'élasticité linéaire appliquée au domaine fréquentiel. On considère un solide dont le mouvement occupe le domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ( $1 \leq d \leq 3$ ) de frontière  $\partial\Omega$  soumis à l'environnement suivant :

- une densité de déplacement  $\bar{\mathbf{u}}$  sur une partie de  $\partial\Omega$  notée  $\partial_1\Omega$  ;
- une densité surfacique d'effort  $\bar{\mathbf{f}}$  sur une partie de  $\partial\Omega$  notée  $\partial_2\Omega$  ;
- une densité volumique d'effort  $\mathbf{f}_v$  sur le domaine  $\Omega$ .

Dans ces conditions, la formulation forte du problème de référence s'exprime par :

Trouver le triplet  $(\mathbf{u}(z), \boldsymbol{\sigma}(z), \boldsymbol{\Gamma}(z))$  avec  $z \in \Omega$  vérifiant :

- **les équations d'équilibre :**

$$\boldsymbol{\Gamma}(z) - \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}(z)) = \mathbf{f} \quad \forall z \in \Omega, \quad (4.19)$$

avec  $\boldsymbol{\Gamma}(z)$  la force d'inertie et  $\mathbf{f}$ , la somme des efforts surfacique et volumique transformés dans le domaine fréquentiel.

- **les relations de comportement :**

- établissant la relation entre le déplacement et la contrainte :

$$\boldsymbol{\sigma}(z) = \mathcal{K}(\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}(z))) \quad \forall z \in \Omega, \quad (4.20)$$

avec  $\mathcal{K}$  le tenseur de Hooke représentatif du matériau et reliant les grandeurs déformation  $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}(z))$  et contrainte  $\boldsymbol{\sigma}(z)$ .

- établissant la relation entre le déplacement et la force d'inertie :

$$\boldsymbol{\Gamma}(z) = -\rho\omega^2\mathbf{u}(z) \quad \forall z \in \Omega, \quad (4.21)$$

avec  $\omega$  la fréquence,  $\rho$  la masse volumique considérée comme constante.

- **les équations de liaisons (CL) :**

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(z) &= \bar{\mathbf{u}} \quad \forall z \in \partial_1\Omega \\ \boldsymbol{\sigma}(z) \cdot \mathbf{n} &= \bar{\mathbf{f}} \quad \forall z \in \partial_2\Omega \end{aligned} \quad (4.22)$$

La méthode des EF - utilisée ici - est une méthode de discrétisation adoptant une formulation en déplacement de l'équation d'équilibre : les vecteurs déplacements vérifient exactement les équations des liaisons (les conditions aux limites). Les vecteurs contrainte  $\sigma$  et force d'inertie  $\Gamma$  sont alors obtenus en utilisant respectivement les relations de comportement (4.20) et (4.21). Cependant, avec cette approche, la contrainte ne vérifie pas exactement, ni l'équation d'équilibre (4.19), ni les CL en effort (4.22).

Pour y remédier, l'idée, à la base de l'ERC, est de considérer séparément les champs de déplacement, de contrainte et de force d'inertie tels que :

- le champ de déplacement  $\mathbf{u}$  vérifie les liaisons cinématiques. On dit qu'il est cinématiquement admissible et il appartient au sous-espace suivant désignant l'ensemble des vecteurs cinématiquement admissibles

$$\mathcal{U}_{ca}(\bar{\mathbf{u}}) = \{\mathbf{u}(z) : \mathbf{u}(z) = \bar{\mathbf{u}}, \forall z \in \partial_1 \Omega\} ; \quad (4.23)$$

- les champs de contrainte  $\sigma$  et de force d'inertie  $\Gamma$  vérifient les équations d'équilibre. On dit alors qu'ils sont dynamiquement<sup>3</sup> admissibles. Ces champs appartiennent alors au sous-espace suivant désignant l'ensemble des vecteurs dynamiquement admissibles

$$\mathcal{D}_{da}(\bar{\mathbf{f}}) = \{(\sigma, \Gamma) : \Gamma(z) - \text{div}(\sigma(z)) = \bar{\mathbf{f}}\}. \quad (4.24)$$

L'erreur, initialement portée par la contrainte, est alors reportée sur la non-vérification de la loi de comportement et est donc appelée erreur en relation de comportement (ERC). L'ERC est donc représentative des grandeurs les moins fiables à savoir les relations de comportement. *A contrario*, on considérera que les équations d'équilibre ainsi que les liaisons cinématiques sont fiables. On définit alors la norme énergétique en raideur suivante  $\mathcal{D}_{\mathbf{K}} : (\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}_+$  entre le couple de vecteurs  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$  de la manière suivante

$$\mathcal{D}_{\mathbf{K}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{\mathbf{K}}^2 = (\mathbf{u} - \mathbf{v})^T \mathbf{K} (\mathbf{u} - \mathbf{v}), \quad (4.25)$$

avec  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{N,N}$  la matrice de raideur du modèle EF constitué de  $N$  ddls. Si on remplace  $\mathbf{K}$  par  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{N,N}$ , on obtient une énergie cinétique. La non-vérification de la première loi de comportement (équation (4.20)) fournit les **erreurs en raideur** tandis que la non-vérification de la seconde loi de comportement (équation (4.21)) fournit des **erreurs en masse**. L'ERC, notée  $e_{ERC}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ , est donc constituée de deux termes, chacun représentant les erreurs sur les lois de comportement. La discrétisation EF des sous-espaces continus  $\mathcal{U}_{ca}(\bar{\mathbf{u}})$  et  $\mathcal{D}_{da}(\bar{\mathbf{f}})$  fournissent des sous-ensembles de dimension  $N$  que l'on notera respectivement  $\mathcal{U}_{ca}^{EF}$  et  $\mathcal{D}_{da}^{EF}$ . Soit  $\mathbf{u} \in \mathcal{U}_{ca}^{EF}$  et  $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in \mathcal{D}_{da}^{EF} \times \mathcal{D}_{da}^{EF}$  alors, l'ERC s'écrit

$$e_{ERC}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \frac{\gamma}{2} \mathcal{D}_{\mathbf{K}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \frac{(1-\gamma)}{2} \omega^2 \mathcal{D}_{\mathbf{M}}(\mathbf{u}, \mathbf{w}), \quad (4.26)$$

---

3. ou statiquement si dans l'équation d'équilibre (4.19) est statique, ie  $\omega = 0$  et  $\Gamma = 0$ .

où  $\gamma \in [0; 1]$  est un poids de pondération indiquant la confiance relative que l'on a dans les relations de comportement (équations (4.20) et (4.21)) :  $\gamma = 1$  indique que l'on a pleinement confiance dans la relation (4.21) et  $\gamma = 0$  indique que l'on a pleinement confiance dans la relation (4.20). Le fait que les champs  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{w}$  appartiennent à l'ensemble dynamiquement admissible ajoutent une contrainte supplémentaire : dans le cas de vibrations libres, ils doivent vérifier la relation

$$\mathbf{K}\mathbf{v} - \omega^2 \mathbf{M}\mathbf{w} = \mathbf{0}. \quad (4.27)$$

Dans [122], une version étendue est introduite dans laquelle les termes d'essais viennent s'ajouter à la fonction coût (4.26) afin de représenter la distance calcul essai. Soit  $\tilde{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^c$ , un terme d'essai représentant le mouvement observé sur les  $c$  capteurs disponibles, l'erreur en relation de comportement étendue<sup>4</sup> (ERCE) s'écrit

$$e(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \frac{\gamma}{2} \mathcal{D}_{\mathbf{K}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \frac{(1-\gamma)}{2} \omega^2 \mathcal{D}_{\mathbf{M}}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + \frac{r}{1-r} \mathcal{D}_{\mathbf{K}_R}(\mathbf{\Pi}\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}) \in \mathbb{R}_+, \quad (4.28)$$

avec  $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$  vérifiant la contrainte (4.27),  $\mathbf{K}_R$  la matrice de raideur réduite<sup>5</sup> aux ddls capteurs,  $\mathbf{\Pi} \in \mathbb{R}^{c,N}$  la matrice de passage entre les maillages numériques et expérimentaux permettant ainsi aux ddls numériques d'être projetés sur les ddls expérimentaux et  $r \in [0; 1]$ , un scalaire permettant d'indiquer la confiance que l'on a dans l'identification des vecteurs propres. Par son manque de sens physique (elle n'est pas mesurable), la valeur de cette dernière est souvent sujette à discussion (elle est couramment fixée à 0.5 sans réelle justification) et dépend clairement de l'utilisation de l'ERCE : on discutera de cet aspect dans la section 4.3.2.

La fonction coût ERCE (4.28) possède des propriétés intéressantes :

- bonne capacité à localiser des erreurs de modélisation [5, 46] ;
- bonne robustesse vis-à-vis de données bruitées [46] ;
- convexité des fonctions coût (illustrée sur de nombreux exemples, par exemple, figure 1.3 dans [5]. Il semble toutefois qu'aucune preuve ne démontre des meilleures propriétés de convexité par rapport à une norme de type  $L^2$  (p.31 dans [119])).

Dans la suite, les propriétés d'admissibilité sont incluses dans la fonction coût afin d'aboutir au système linéaire à résoudre si l'on désire étendre des modes propres avec l'ERCE.

### 4.3.2 ERCE comme opérateur d'expansion

Il est possible d'utiliser la fonction coût ERCE comme opérateur d'expansion, comme par exemple formulé dans [90], bien que sa formulation générique ne soit pas limitée à cette

4. Dans certaines publications, par exemple [18], on parle également d'erreur en relation de comportement modifiée (ERCM).

5. Dans ce mémoire, une réduction de Guyan sur les ddls capteurs est réalisée.

utilisation. La minimisation de la fonction coût ERCE (4.28) associée avec les contraintes d'admissibilité définies à l'équation (4.27) s'écrit

$$\min_{(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})} e(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \quad \text{avec} \quad \mathbf{K}\mathbf{v} = \omega^2 \mathbf{M}\mathbf{w}. \quad (4.29)$$

L'introduction des contraintes dans la résolution du problème d'optimisation est réalisée à l'aide des multiplicateurs de Lagrange, notés  $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^N$ , afin de résoudre le problème d'optimisation sans contrainte suivant

$$\min_{(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})} g(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = e(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{K}\mathbf{v} - \omega^2 \mathbf{M}\mathbf{w}). \quad (4.30)$$

Les solutions sont fournies par les points stationnaires suivants<sup>6</sup>

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial \mathbf{u}} = 0 & \Leftrightarrow \gamma \mathbf{K}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) + (1 - \gamma) \omega^2 \mathbf{M}(\mathbf{u} - \mathbf{w}) + \frac{2r}{1-r} \boldsymbol{\Pi}^T \mathbf{K}_R (\boldsymbol{\Pi} \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}) = 0 ; \\ \frac{\partial g}{\partial \mathbf{v}} = 0 & \Leftrightarrow -\gamma \mathbf{K}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) + \mathbf{K} \boldsymbol{\lambda} = 0 ; \\ \frac{\partial g}{\partial \mathbf{w}} = 0 & \Leftrightarrow -(1 - \gamma) \omega^2 \mathbf{M}(\mathbf{u} - \mathbf{w}) - \omega^2 \mathbf{M} \boldsymbol{\lambda} = 0 ; \\ \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = 0 & \Leftrightarrow \mathbf{K}\mathbf{v} - \omega^2 \mathbf{M}\mathbf{w} = 0. \end{cases} \quad (4.31)$$

$\mathbf{M}$  est symétrique et définie positive - elle est donc inversible - et en utilisant la troisième ligne du système (4.31), on obtient

$$\boldsymbol{\lambda} = -(1 - \gamma) (\mathbf{u} - \mathbf{w}). \quad (4.32)$$

En injectant la relation (4.32) à la deuxième ligne du système (4.31), on obtient la relation

$$\gamma \mathbf{K}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) + (1 - \gamma) \mathbf{K}(\mathbf{u} - \mathbf{w}) = 0. \quad (4.33)$$

La dernière ligne du système (4.31) peut se réécrire de la manière suivante

$$\mathbf{K}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) - \omega^2 \mathbf{M}(\mathbf{u} - \mathbf{w}) = (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{u}. \quad (4.34)$$

La première ligne du système (4.31) ainsi que les équations (4.33) et (4.34) nous permettent d'obtenir le système  $3N \times 3N$  suivant :

$$\begin{bmatrix} \gamma \mathbf{K} & (1 - \gamma) \omega^2 \mathbf{M} & \frac{2r}{1-r} \boldsymbol{\Pi}^T \mathbf{K}_R \boldsymbol{\Pi} \\ \gamma \mathbf{K} & (1 - \gamma) \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K} & -\omega^2 \mathbf{M} & -(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} - \mathbf{v} \\ \mathbf{u} - \mathbf{w} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2r}{1-r} \boldsymbol{\Pi}^T \mathbf{K}_R \tilde{\mathbf{u}} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (4.35)$$

Comme les champs  $(\mathbf{u} - \mathbf{v})$  et  $(\mathbf{u} - \mathbf{w})$  sont couplés, on peut transformer ce système  $3N \times 3N$  en un système  $2N \times 2N$  en utilisant la troisième ligne du système (4.31), ce qui nous permet d'obtenir la relation :

$$(1 - \gamma) (\mathbf{u} - \mathbf{w}) = -\gamma (\mathbf{u} - \mathbf{v}). \quad (4.36)$$

---

6. Sachant que si  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{N,N}$  est symétrique alors  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ , on a :  $\frac{\partial \mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{A}\mathbf{x}$ .



Suivant la valeur de  $\gamma$ , on distingue trois cas :

- dans le cas où  $\gamma \in ]0; 1[$ , l'équation (4.35) peut se transformer, en utilisant l'équation (4.36) et en effectuant une permutation des lignes, comme un système symétrique :

$$\begin{bmatrix} -\gamma \left( \mathbf{K} + \frac{\gamma}{1-\gamma} \omega^2 \mathbf{M} \right) & \gamma (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \\ \gamma (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) & \frac{2r}{1-r} \mathbf{\Pi}^T \mathbf{K}_R \mathbf{\Pi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} - \mathbf{v} \\ \mathbf{u} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \frac{2r}{1-r} \mathbf{\Pi}^T \mathbf{K}_R \tilde{\mathbf{u}} \end{Bmatrix}; \quad (4.37)$$

- dans le cas où  $\gamma = 1$ , ie en ne supposant aucune erreur en masse (uniquement une erreur en raideur), le champ  $\mathbf{w}$  n'existe plus et la fonction coût écrite équation (4.28) se transforme en :

$$e(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathcal{D}_{\mathbf{K}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \frac{r}{1-r} \mathcal{D}_{\mathbf{K}_R}(\mathbf{\Pi} \mathbf{u}, \mathbf{u}^t) \in \mathbb{R}_+, \quad (4.38)$$

ce qui, en suivant une démarche analogue, permet d'aboutir au système :

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{K} & \mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} \\ \mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} & \frac{r}{1-r} \mathbf{\Pi}^T \mathbf{K}_R \mathbf{\Pi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} - \mathbf{v} \\ \mathbf{u} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \frac{r}{1-r} \mathbf{\Pi}^T \mathbf{K}_R \tilde{\mathbf{u}} \end{Bmatrix}. \quad (4.39)$$

- le cas où  $\gamma = 0$ , ie en ne supposant aucune erreur en raideur (uniquement une erreur en masse) n'est pas écrit, ici, car il ne sera pas utilisé dans le mémoire. D'ailleurs, bien que l'on considère assez souvent le cas d'une erreur en raideur seulement, le cas d'une erreur en masse seulement est rare dans la littérature et semble présenter peu d'intérêt.

D'un point de vue numérique, l'introduction des conditions aux limites (CL) dans la construction des matrices du modèle EF se fait soit en ajoutant des multiplicateurs de Lagrange soit en ne considérant que les ddls actifs (les lignes et colonnes correspondant aux CL sont éliminées). Dans ce travail, on utilise la restriction aux ddls actifs des matrices du modèle pour l'introduction des CL.

La première question naturelle pourrait être dans quelle mesure l'ERCE est un opérateur d'expansion et plus précisément quel rôle jouent les termes d'essais dans la fonctionnelle exprimée à l'équation (4.28) ? L'expansion se base sur la minimisation de la fonction coût construite par l'ERCE. De manière générale, un problème d'expansion conduit à la résolution d'un système linéaire sous-déterminé : on dit alors que le problème est mal-posé au sens de Hadamard car la solution n'est pas unique. Pour remédier au caractère mal-posé des problèmes d'expansion, des techniques de régularisation de type Tikhonov [143] peuvent être introduites : parmi l'ensemble des solutions admissibles - c'est à dire vérifiant le système d'équations - on introduit des conditions dites de régularisation permettant d'introduire une connaissance *a priori* de la solution et ayant les propriétés de stabiliser la solution lorsque le second membre est bruité. L'utilisation de techniques de régularisation est, par exemple, très répandue lors de résolution de problèmes inverses [141] (outre les méthodes

d'expansion, cela concerne les méthodes de détection d'endommagement).

Dans le cadre de l'ERCE, les termes d'essais jouent le rôle de paramètres de régularisation de Tikhonov ce qui facilite le problème inverse de reconstruction des champs non observés. Le paramètre  $r$  permet de régler l'importance de la régularisation dans le problème d'expansion : le choix de sa valeur est non trivial. Comme indiqué précédemment, dans les nombreuses publications traitant de l'ERCE, peu apportent de réelle justification à la valeur de  $r$ . Dans [80], il est néanmoins indiqué, sur la base d'une illustration sur une structure industrielle, que la valeur de  $r = 0.5$  conduit la fonction coût à être robuste vis-à-vis du bruit. D'autre part, dans [18], l'ERCE est utilisée comme fonction coût pour l'identification de paramètres en élastodynamique à partir de mesures expérimentales. La minimisation est effectuée de manière itérative et les auteurs proposent donc un schéma itératif croissant pour  $r$  afin de diminuer le nombre d'itérations pour obtenir les paramètres identifiés optimaux. Cette approche semble logique puisque, au cours des itérations, les termes de régularisation vont contraindre de plus en plus la fonctionnelle facilitant ainsi la résolution du problème inverse. Le schéma itératif (la façon dont évolue  $r$  au cours des itérations) dépend clairement du niveau de bruit présent dans les données expérimentales. Pour y remédier, dans [57], une méthodologie a été développée permettant de choisir la valeur convenable de  $r$  en ayant à disposition un modèle de bruit obtenu à partir de mesure de champ de type interférométrie. Il semble donc y avoir plusieurs écoles et le choix de  $r$  dépend du cadre d'utilisation de l'ERCE.

Pour l'obtention des champs étendus *via* l'ERCE, la valeur du paramètre  $r$  doit représenter la confiance que l'on a dans les vecteurs propres identifiés. Ce que l'on doit simplement garder à l'esprit est que plus  $r$  tend vers 1 plus le mouvement des ddls correspondant aux essais du vecteur étendu tend vers le mouvement des ddls d'essais. *A contrario*, plus  $r$  tend vers 0, plus le mouvement des ddls correspondant aux essais du vecteur étendu tend vers le mouvement des ddls des solutions propres du modèle numérique  $\phi$  :

$$\begin{aligned} r \rightarrow 1 &\Rightarrow \Pi \mathbf{u} \rightarrow \tilde{\mathbf{u}}; \\ r \rightarrow 0 &\Rightarrow \Pi \mathbf{u} \rightarrow \phi. \end{aligned} \tag{4.40}$$

Les deux termes de l'ERCE remplissent donc un rôle différent lors de l'expansion : les termes d'erreur en raideur et en masse fixent les formes possibles (eg admissibles) tandis que le second terme avec les essais permet d'obtenir le meilleur vecteur étendu - au sens où il minimise la distance calcul essai au regard de la norme énergétique définie (équation (4.25)) - parmi tous ceux possible. Bien que le concept de l'ERC/ERCE ne soit pas nouveau (au moins 30 ans), les difficultés de résolution numérique<sup>7</sup> du système ERCE (équation (4.37)) ainsi

---

7. Ces difficultés seront illustrées dans la suite.

que son application à des problèmes inverses font que l'ERCE demeure, encore aujourd'hui, un sujet actif de recherche.

### 4.3.3 Illustrations

#### Comparaison du comportement des méthodes d'expansion classique vis-à-vis du bruit

L'objectif de cette section est d'illustrer les performances de l'expansion ERCE (version erreur en raideur écrite à l'équation (4.39)) vis-à-vis du bruit par rapport à d'autres méthodes classiques d'expansion comme :

- la méthode d'expansion dynamique (ED) non-contrainte (équation (4.12)) ;
- la méthode d'expansion statique (ES) non-contrainte (équation (4.13)) ;
- la méthode d'expansion SEREP ordinaire - *ie* non-lissé - (équation (4.2) avec  $\mathbf{T}$  constituée des modes propres du modèle numérique).

Pour pouvoir comparer ces méthodes, on utilise

$$\begin{aligned} & - \text{pour l'ERCE :} & r = 0.5 ; \\ & - \text{pour l'ED et l'ES :} & r = 1 ; \\ & - \text{pour SEREP :} & m = 10. \end{aligned} \tag{4.41}$$

Ainsi, le poids des essais dans les fonctions coût est le même.

On utilise un portique 2D modélisé par des éléments barres dont le mouvement évolue dans le plan  $(x, y)$  et représenté sur la figure 4.1. Le modèle EF est constitué de 400 nœuds à 3 ddls par nœud. En prenant en compte les CL - encastrement à la base du portique sur 2 nœuds - on obtient un modèle EF constitué de  $N = 1194$  ddls actifs. Trois zones sont définies et comportent des propriétés matériaux différentes qui sont reportées sur le tableau 4.2.

Paramètres	Module d'Young	Masse volumique	Coeff. de Poisson	Rayon des barres
<b>Zone 1</b>	190 GPa	7800 kg.m <sup>-3</sup>	0.3	0.2 cm
<b>Zone 2</b>	70 GPa	7800 kg.m <sup>-3</sup>	0.3	0.2 cm
<b>Zone 3</b>	10 GPa	8500 kg.m <sup>-3</sup>	0.3	0.2 cm

TAB. 4.2: Paramètres géométriques et matériels du portique

Le modèle EF - considéré comme le modèle réel et fournissant les couples de solutions propres notés  $(\omega_v, \phi_v)$  - permet de simuler le modèle expérimental  $(\omega_v^t, \phi_v^t)$  avec  $v \in \{1, \dots, m\}$  et  $m = 10$  : on retient 20 ddls sur les solutions propres du modèle EF (donc  $c = 20$ ), la position des capteurs<sup>8</sup> étant précisée sur la figure 4.1. Le bruit, noté  $\eta$  avec  $\eta \in [0; 1]$ , est introduit de

8. Notons que le placement de capteurs n'est pas forcément optimal, le lecteur est invité à se référer, par exemple, à [148] pour plus de détails sur les méthodes existantes.

manière graduelle sur le modèle expérimental par :

$$\begin{cases} \omega_v^t(\eta) = \omega_v^t(0) \left(1 + \frac{\eta}{5} (1 - 2x)\right) \\ \phi_v^t(\eta) = \phi_v^t(0) (1 + \eta(1 - 2\mathbf{y})) \end{cases} \quad (4.42)$$

avec  $x$  une réalisation de la variable aléatoire  $\underline{x}$  correspondante à valeur dans  $\mathbb{R}$  qui suit la loi uniforme standard (fonction rand de Matlab<sup>®</sup>),  $\mathbf{y}$  un vecteur dont les valeurs sont des réalisations du vecteur de variables aléatoires  $\underline{\mathbf{y}}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^c$  qui suit également la loi uniforme standard,  $\omega_v^t(\eta = 0) = \omega_v$  et  $\phi_v^t(\eta = 0) = \mathbf{\Pi} \phi_v$  pour tous les modes  $v \in \{1, \dots, m\}$ . On note que l'on réduit le bruit sur les fréquences propres par un facteur 5 afin de ne pas trop pénaliser la méthode d'expansion dynamique (ED) : ce facteur est licite dans le sens où on considère généralement que l'identification des pôles est moins bruitée que l'identification des résidus (et donc des vecteurs propres).

L'introduction du bruit tel que défini à l'équation (4.42) conduit à une faible détérioration du MAC entre les modes propres du modèle numérique et les modes propres bruités : la figure 4.2 présente l'évolution de la plus petite valeur de la diagonale du MAC entre les vecteurs propres du modèle numérique  $\phi_v$  et les vecteurs propres d'essais bruités  $\phi_v^t$  ( $v \in \{1, \dots, m\}$ ). Jusqu'à  $\eta = 0.6$  (correspondant donc à un niveau de 60% de bruit), cette valeur est supérieure à la valeur critique de 0.7, limite empirique à partir de laquelle l'appariage entre les modes n'est plus considérée comme valide. On utilise la valeur moyenne de la diagonale du

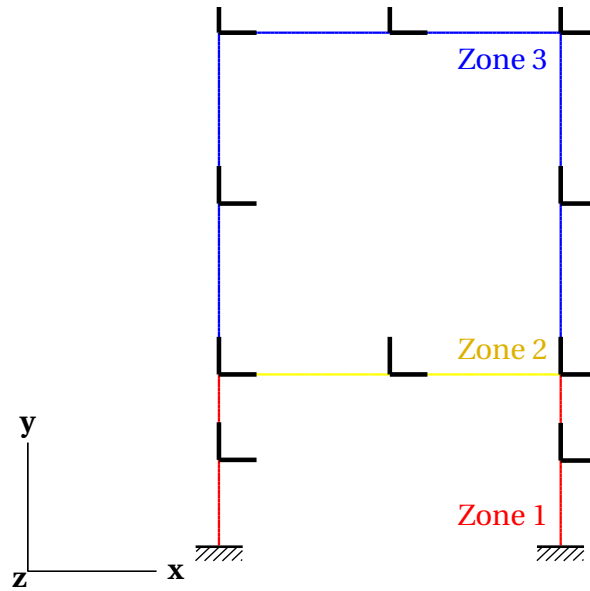


FIG. 4.1: Portique 2D et position des capteurs

MAC entre les  $m = 10$  vecteurs étendus et les  $m$  vecteurs propres du modèle numérique pour

évaluer l'erreur d'expansion que l'on note  $\varepsilon$  :

$$\varepsilon(\eta, \underline{\mathbf{y}}) = \frac{1}{m} \sum_{v=1}^m \text{MAC}(\hat{\boldsymbol{\phi}}_v(\eta, \underline{\mathbf{y}}), \boldsymbol{\phi}_v). \quad (4.43)$$

Comme  $\underline{\mathbf{y}}$  est une variable aléatoire, on effectue plusieurs tirages pour représenter le plus fidèlement possible le niveau de bruit simulé :  $n = 1000$  tirages sont réalisés. Finalement, le critère d'évaluation utilisé est noté  $\bar{\varepsilon}$  et est obtenu par

$$\bar{\varepsilon}(\eta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon(\eta, \mathbf{y}_i). \quad (4.44)$$

La figure 4.3 présente l'évolution<sup>9</sup> de l'erreur d'expansion  $\bar{\varepsilon}$  en fonction du bruit  $\eta$ .

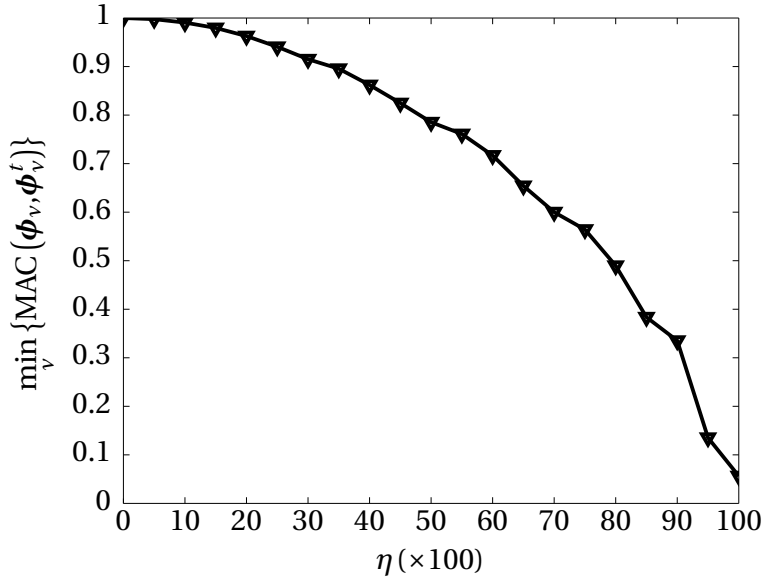


FIG. 4.2: Impact du bruit sur les vecteurs propres d'essais  $\boldsymbol{\phi}_v^t$

Les résultats obtenus sont cohérents avec des conclusions présentées dans la littérature (cf. tableau bilan 1 dans [17]). Notamment, les méthodes d'expansion statique (ES) et dynamique (ED) semblent peu robustes vis-à-vis du bruit, même lorsque le modèle EF est capable de reproduire le comportement dynamique. Concernant l'expansion SEREP, il est important de noter que l'on utilise une base de rang inférieur au nombre de capteur : ceci est bénéfique pour le comportement de l'expansion vis-à-vis du bruit et améliore nettement la robustesse de la méthode SEREP vis-à-vis du bruit. Des essais ont été effectués en élargissant le nombre de modes dans  $\mathbf{T}$  et ont montré que cette augmentation du rang de la base (alors

9. On rappelle que l'erreur d'expansion étant dérivée du MAC, plus l'erreur d'expansion sera faible (resp. grande) plus elle tend vers 1 (resp. 0).

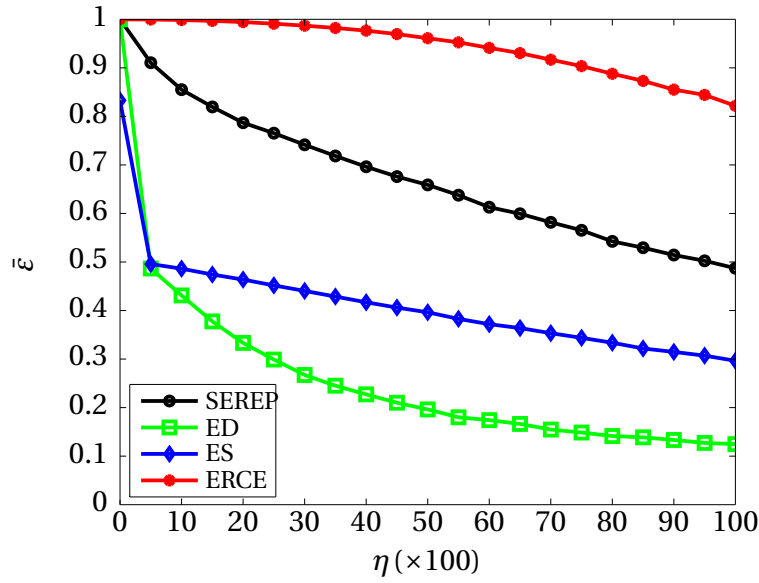


FIG. 4.3: Erreur d'expansion en fonction du bruit suivant les méthodes d'expansion classique (ED : expansion dynamique et ES : expansion statique)

supérieur au nombre de capteurs) tend à dégrader l'expansion<sup>10</sup>. Le choix de la base apparaît donc comme étant primordial, malheureusement la robustesse de l'expansion vis-à-vis du bruit n'est pas assurée pour chaque base. Comme indiqué sur la figure 4.3, l'expansion ERCE traduit un comportement très robuste vis-à-vis du bruit car les vecteurs étendus ne sont quasiment pas affectés par le bruit. L'inconvénient principal réside dans le coût associé à l'expansion : pour chaque mode à étendre, on doit résoudre un système  $2N \times 2N$ , où  $N$  est le nombre de ddls actifs du modèle EF.

#### Comparaison du comportement des méthodes d'expansion classiques lorsque le modèle EF est non-validé

Le cas-test précédent repose sur l'hypothèse que le modèle EF est capable de représenter le comportement dynamique expérimental : bien que bruité, le modèle expérimental a été simulé en partant du modèle EF. En ce qui concerne les alternateurs, le modèle EF est peu représentatif du comportement dynamique observé. L'objectif de cette illustration est donc d'étudier le comportement des méthodes d'expansion classiques lorsque le modèle EF n'est pas complètement capable de représenter le comportement dynamique expérimental. Pour cela, on considère un troisième modèle (en plus du modèle « réel » et du modèle expérimental). Le modèle réel permet de simuler exactement (sans bruit) le modèle expérimental

---

10. Pour illustration, lorsque  $\eta = 0.5$ , l'erreur d'expansion passe de 0.65 quand 10 modes sont présents dans la base à 0.29 lorsque la base est constituée de 50 modes.

et l'objectif est d'étendre le modèle expérimental sur le modèle non validé (le troisième modèle).

On reprend l'exemple du portique 2D représenté en figure 4.1. On apporte tout de même quelques modifications sur le modèle réel. Afin de représenter la souplesse de la liaison encastrement, on ajoute des ressorts de raideur  $k = 1000 \text{ N.m}^{-1}$  égales dans les directions  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  et un ressort de raideur  $k_z = 1000 \text{ N.m}$  autour de la direction  $\mathbf{z}$  entre le sol et les 2 nœuds initialement encastrés. De plus, on divise par 4 le module d'Young dans la zone 1. Le modèle expérimental est simulé exactement à partir du modèle réel : la figure 4.4 présente le MAC entre le modèle EF et le modèle expérimental.

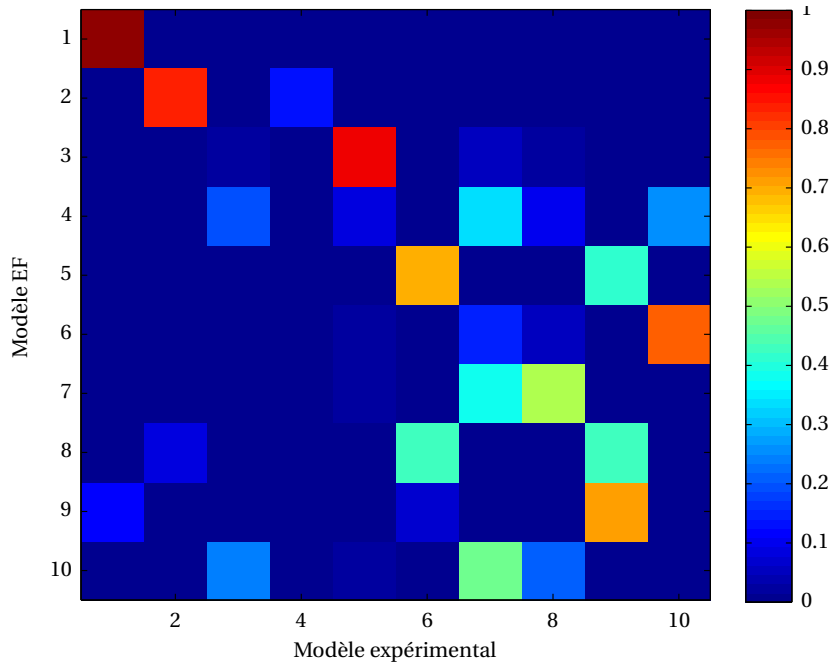


FIG. 4.4: MAC entre les vecteurs propres numériques et expérimentaux

En dehors des deux premiers modes, on voit clairement que le modèle EF a des difficultés à prédire correctement les modes propres expérimentaux. Avec les mêmes paramètres que précédemment, on étend les modes propres expérimentaux sur le modèle EF avec les méthodes d'expansion classique. La figure 4.5 présente la valeur de la diagonale du MAC entre les vecteurs étendus et les vecteurs propres réels, notés  $\phi_v^*$  avec  $v \in \{1, \dots, m\}$ .

On observe que l'expansion ERCE permet de retrouver la plupart des modes réels. Les autres méthodes fournissent des résultats plus médiocres et illustrent ainsi leurs incapacités à prédire les vecteurs corrects lorsque le modèle EF n'est pas de qualité satisfaisante.

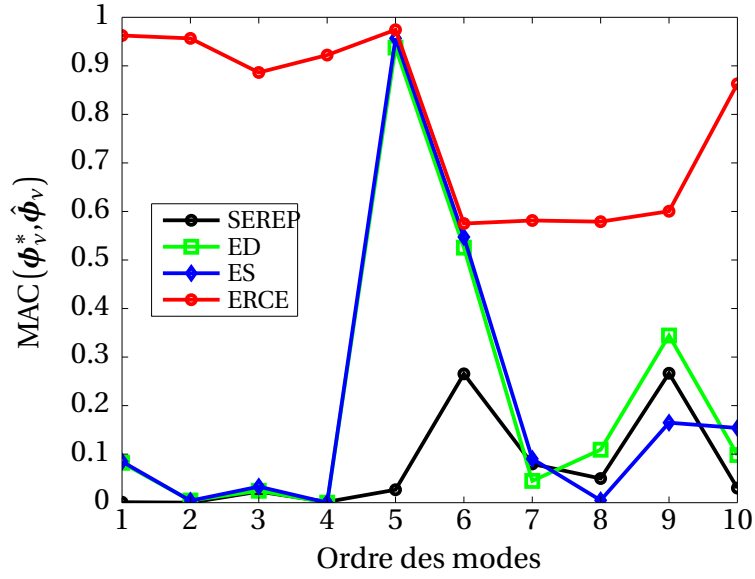


FIG. 4.5: Erreur d'expansion en fonction des modes (ED : expansion dynamique et ES : expansion statique)

#### 4.3.4 Bilan

En général, on est confronté, lors de l'expansion, à la fois aux incertitudes provenant de la construction du modèle EF et aux incertitudes expérimentales. Évidemment, on ne peut pas espérer d'une méthode d'expansion qu'elle fournisse des résultats satisfaisants lorsque ces deux incertitudes impactent fortement le comportement dynamique d'un système. Néanmoins, lorsque les deux types d'incertitude sont considérés séparément, les exemples ont clairement illustré la capacité de l'ERCE à être un opérateur d'expansion efficace. Son comportement robuste vis-à-vis du bruit nous indique sa capacité à retenir l'information essentielle. D'autre part, lorsque le modèle EF est de mauvaise qualité, la figure 4.5 illustre le fait que l'ERCE est raisonnablement capable de nous fournir des vecteurs étendus semblables aux vecteurs réels. Enfin, l'ERCE, utilisée comme opérateur d'expansion ici, offre un cadre bien plus général que les autres méthodes d'expansion. Ces bonnes propriétés ainsi que sa formulation très générique nous confortent à l'utiliser comme opérateur d'expansion dans la suite du travail.

### 4.4 Expansion modale robuste

L'expansion de données, quelle que soit l'approche, dépend de la qualité du modèle EF, c'est à dire de la capacité du modèle à prédire le comportement dynamique identifié : ceci a été illustré dans la section 4.3.3. Lorsque la capacité de prédiction n'est pas satisfaisante,



on modifie le modèle EF en utilisant des méthodes de calibration paramétrique [100], non-paramétrique [135] voire stochastique [20] jusqu'à obtenir une qualité satisfaisante. Comme on pourra le voir à la section 4.4.1, ces méthodes reposent sur l'hypothèse que le modèle est capable de représenter le comportement dynamique observé. Mais comment calibrer un modèle lorsqu'une partie du modèle est méconnue ?

#### 4.4.1 Robustesse, fidélité et dispersion des prédictions

La procédure d'expansion robuste, que l'on détaillera à la section 4.4.2, est une adaptation de la procédure de calibration robuste, récemment proposée dans [24] et appliquée dans [114, 144], à la construction d'un modèle hybride. Le modèle du système dans l'expansion robuste implique l'expansion de données expérimentales alors que le modèle du système dans le cas de la calibration robuste implique le calcul de réponse d'intérêt (comme les solutions propres) afin d'estimer une distance calcul essai. La procédure d'expansion robuste partage donc, sans biais, les propriétés intéressantes mises en évidence dans [24] lorsque l'on cherche à calibrer un modèle vis-à-vis de données expérimentales disponibles.

Le constat établi pour la calibration robuste est le suivant : lors de la calibration d'un modèle, il n'est pas raisonnable de chercher à construire à tout prix un modèle optimal - au sens où il minimise les écarts avec les mesures - puisqu'il est démontré que ces modèles optimaux n'ont aucune robustesse vis-à-vis des hypothèses à partir desquelles ils sont construits. Ce constat est également partagé lorsque l'on examine la relation entre la fidélité vis-à-vis des données et la complexité des modèles : dans [103], l'auteur indique que calibrer un modèle avec des exigences de fidélité vis-à-vis des données uniquement est une condition nécessaire mais non suffisante à l'obtention d'un modèle représentatif du comportement observé. En illustrant le risque de sur-ajustement des modèles complexes, il souligne le fait que la complexité du modèle, ainsi que sa « généralisabilité » - c'est à dire sa capacité à prédire des données non-utilisées lors de sa calibration - doivent également être des critères de sélection du modèle.

Partant de ces constats, dans [24], les auteurs préconisent que la sélection des modèles devrait se faire sur la base de trois critères :

- **fidélité vis-à-vis des données** : les prédictions du modèle doivent être cohérente avec les données expérimentales ;
- **robustesse vis-à-vis des incertitudes** : le modèle doit être robuste vis-à-vis des incertitudes ;
- **dispersion des prédictions** : les prédictions venant d'une famille de modèle doivent établir une preuve d'évidence consistante.

Alors que les stratégies classiques de calibration de modèle en dynamique des structures se concentrent à satisfaire des exigences de fidélité vis-à-vis des données (que ce soit les méthodes de recalage paramétrique ou stochastiques), il est assez rare, dans la littérature, de prendre en compte les deux autres critères de sélection des modèles. Malheureusement, toujours dans [24], il a été démontré que ces trois critères sont antagonistes : il n'est pas possible de les améliorer de façon simultanée. Ceci est la conséquence de deux théorèmes, dont la preuve est disponible dans [24]. Comme dans ce travail nous avons cherché à mettre en évidence le compromis entre fidélité vis-à-vis des données et robustesse vis-à-vis des incertitudes<sup>11</sup>, nous proposons de rappeler brièvement le théorème établissant ce compromis.

**Théorème 1 : la robustesse augmente lorsque la fidélité vis-à-vis des données diminue**

Soit  $\mathcal{U}(\alpha, \mathbf{u}^0)$ , un modèle d'incertitude info-gap obéissant aux axiomes d'imbrication (équation (2.13)) et de contraction (équation (2.14)). Soit  $\hat{\alpha}(\mathbf{q}, r_c)$ , la valeur de robustesse correspondante et  $(r_c, r'_c) \in \mathbb{R}^2$ , deux valeurs critiques de la distance calcul essai. Si  $r_c < r'_c$  alors :

$$\hat{\alpha}(\mathbf{q}, r_c) \leq \hat{\alpha}(\mathbf{q}, r'_c). \quad (4.45)$$

Les compromis entre fidélité vis-à-vis des données et robustesse vis-à-vis des incertitudes sont notamment explorés par le tracé des courbes de robustesse et on verra à travers les exemples que l'on proposera dans les sections suivantes les intérêts d'étudier ces compromis.

#### 4.4.2 Formulation

Dans cette section, on propose une stratégie de calibration de modèle hybride, basée sur des exigences de robustesse, l'objectif étant d'obtenir un modèle hybride aussi peu sensible que possible aux variations des paramètres incertains. La décision que l'on va chercher à évaluer est la suivante : quel niveau d'incertitude peut-on tolérer sur les paramètres incertains du modèle hybride sans changer la forme des vecteurs étendus ? Une fois cette décision évaluée, on va chercher les paramètres du modèle hybride les plus robustes vis-à-vis des paramètres incertains. On notera la distinction entre paramètre incertain et paramètre de calibration (ou de décision) : cette distinction est précisée dans la suite.

Le chapitre 3 a permis d'explorer un aspect de la robustesse, à savoir, quel niveau d'incertitude peut-on tolérer sur les paramètres incertains sans que le système ne dépasse une valeur seuil de performance ? Dans ce chapitre, un autre aspect de la robustesse est étudié : en reprenant les termes exprimés dans l'équation (2.17), on va désormais chercher les termes

---

11. Le compromis entre robustesse vis-à-vis des incertitudes et dispersions dans les prédictions n'a pas été étudié dans le cadre de cette thèse. Le lecteur intéressé pourra, par exemple, se référer à [62].

$\mathbf{q}$ , que l'on qualifiera de paramètres de décision, pour augmenter la robustesse  $\hat{\alpha}(\mathbf{q}, y^c)$ . Les travaux en lien avec l'approche présentée ci-dessous sont par exemple [63, 145, 114].

La procédure d'expansion robuste se basant sur le cadre offert par la théorie info-gap, on va détailler, dans la suite, les différents éléments impliqués dans l'analyse de robustesse :

- **Le modèle du système.** Il établit la relation entre les paramètres incertains du modèle EF et l'erreur d'expansion. Les paramètres incertains, regroupés dans le vecteur  $\mathbf{x}$ , constituent un sous-ensemble des paramètres du modèle EF. On veillera à ne pas confondre les paramètres de décision, regroupés dans le vecteur  $\mathbf{q}$ , et constituant un autre sous-ensemble des paramètres du modèle EF avec les paramètres incertains. Ainsi, dans ce travail, on considérera que

$$\mathbf{x} \cap \mathbf{q} = \emptyset. \quad (4.46)$$

L'ensemble des paramètres incertains est strictement distinct de l'ensemble des paramètres de calibration. La méthode d'expansion étant basée sur la minimisation de l'ERCE, le modèle du système établit la relation entre le vecteur étendu  $\mathbf{u}$  et le vecteur réel<sup>12</sup>  $\mathbf{u}^*$  par :

$$\mathcal{P}(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*) = s, \quad (4.47)$$

avec  $\mathcal{P}$  un opérateur de comparaison de forme (par défaut le MAC est utilisé, dans le cas contraire on le précisera) permettant d'évaluer l'erreur  $s$  entre les deux vecteurs  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{u}^*$ . Le vecteur étendu  $\mathbf{u}$  est obtenu par résolution du système linéaire suivant :

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{K}(\mathbf{q}, \mathbf{x}) & \mathbf{K}(\mathbf{q}, \mathbf{x}) - \omega^2 \mathbf{M}(\mathbf{q}, \mathbf{x}) \\ \mathbf{K}(\mathbf{q}, \mathbf{x}) - \omega^2 \mathbf{M}(\mathbf{q}, \mathbf{x}) & \frac{r}{1-r} \mathbf{\Pi}^T \mathbf{K}_R(\mathbf{q}, \mathbf{x}) \mathbf{\Pi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} - \mathbf{v} \\ \mathbf{u} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \frac{r}{1-r} \mathbf{\Pi}^T \mathbf{K}_R(\mathbf{q}, \mathbf{x}) \tilde{\mathbf{u}}, \end{Bmatrix} \quad (4.48)$$

dans laquelle les dépendances des matrices du modèle EF vis-à-vis des paramètres incertains  $\mathbf{x}$  et de décision  $\mathbf{q}$  sont explicitées. Il est possible de finalement réécrire le modèle du système sous la forme symbolique :

$$\mathcal{M}(\mathbf{q}, \mathbf{x}) = s. \quad (4.49)$$

- **Le modèle de prise de décision.** Il indique que l'erreur d'expansion ne doit pas dépasser une certaine valeur critique. Dans ce cas, le modèle de prise de décision est simplement

$$\mathcal{M}(\mathbf{q}, \mathbf{x}) \leq s^c. \quad (4.50)$$

Comme dans le chapitre 3, l'exigence de performance est traduite, ici, par la valeur critique  $s^c$  : plus cette valeur sera faible, plus on sera exigeant envers le système.

12. Ceci est valable uniquement lorsque des cas simulés seront utilisés. Pour la définition de l'erreur d'expansion lorsque le vecteur réel n'est pas disponible, on se reportera à la section 4.4.4.

- **Le modèle d'incertitude.** Il décrit l'espace de variation des paramètres incertains du modèle EF sous la forme de sous-ensembles convexes et imbriqués. Ainsi, le paramètre incertain est contraint à appartenir au modèle d'incertitude

$$\mathbf{x} \in \mathcal{U}(\alpha, \mathbf{x}^0), \quad (4.51)$$

avec  $\alpha \in \mathbb{R}_+$ , l'horizon d'incertitude qui est inconnu et  $\mathbf{x}^0$ , l'estimation initiale des paramètres incertains. Comme nous avons pu l'indiquer dans la section 2.3.4, il existe de nombreux modèles d'incertitude. Pour chaque cas étudié, on présentera le modèle que l'on utilisera.

Ces éléments nous permettent de définir la fonction robustesse qui exprime le plus grand horizon d'incertitude pour lequel aucune défaillance, au sens du modèle de prise de décision, ne peut avoir lieu et s'écrit, ici :

$$\hat{\alpha}(\mathbf{q}, s^c) = \max \left\{ \alpha : \left( \max_{\mathbf{x} \in \mathcal{U}(\alpha, \mathbf{x}^0)} \mathcal{M}(\mathbf{q}, \mathbf{x}) \right) \leq s^c \right\} \in \mathbb{R}_+. \quad (4.52)$$

La fonction robustesse sera donc utilisée pour évaluer la capacité des paramètres de décision à fournir une erreur d'expansion résistante vis-à-vis des paramètres incertains. Pour améliorer la robustesse d'un modèle donné, on calibre le modèle dans une démarche robuste. Les paramètres robustes sont obtenus par résolution du problème d'optimisation suivant :

$$\mathbf{q}^R(s^c) = \arg\max_{\mathbf{q}} \{ \hat{\alpha}(\mathbf{q}, s^c) \}. \quad (4.53)$$

Les paramètres robustes dépendent directement du niveau d'exigence que l'on apporte au modèle de prise de décision  $s^c$ . On pourra se reporter aux applications proposées aux sections 4.4.3 et 4.4.4.

D'un point de vue numérique, la procédure proposée est extrêmement coûteuse. En effet, analyser la robustesse d'un modèle est déjà coûteux puisque cela consiste à résoudre deux boucles d'optimisation imbriquées l'une dans l'autre. Ici, on rajoute une boucle : on cherche le modèle qui maximise la robustesse. Néanmoins, la procédure a pour objectif de rendre plus robuste le modèle hybride vis-à-vis de zones comportant de sévères méconnaissances.

### 4.4.3 Application académique

#### Cylindre académique

Le procédé d'expansion robuste est illustré sur un cylindre académique. Le modèle EF est représenté sur la figure 4.6 tandis que les modes propres expérimentaux sont simulés sur la base du modèle réel : le maillage expérimental est composé de 120 ddls (cf. Figure 4.7). Le

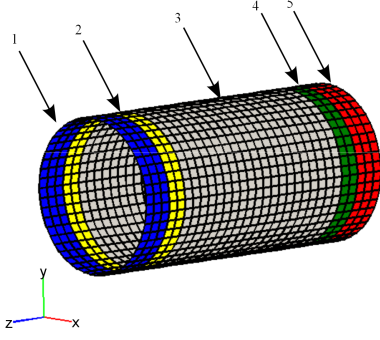


FIG. 4.6: Modèle EF

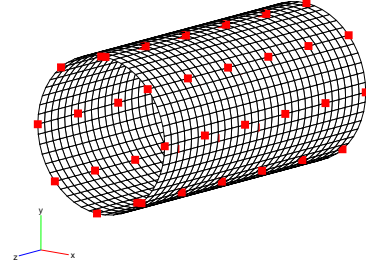


FIG. 4.7: Position des capteurs

Nom:	Zone	Réel	Modèle	Erreur
<b>Mod. Young <math>E_1</math> (Pa)</b>	1	$3.10^9$	$2,5.10^9$	- 6%
<b>Mod. Young <math>E_5</math> (Pa)</b>	5	$3.10^9$	$2,2.10^9$	- 13%
<b>Mod. Young <math>E_2</math> (Pa)</b>	2	$2.10^9$	$2,4.10^9$	+ 20%
<b>Mod. Young <math>E_4</math> (Pa)</b>	4	$2,5.10^9$	$2,7.10^9$	+ 8%

TAB. 4.3: Distance réel/modèle

cylindre est composé de cinq zones différentes, numérotés de 1 à 5 de gauche à droite sur la figure 4.6, comportant chacune des propriétés matérielles différentes. Comme indiqué sur le tableau 4.3, les différences entre le modèle réel, utilisé pour simuler exactement - ie sans bruit - les modes propres expérimentaux, et le modèle non-validé sont situées dans les zones 1,2,4 et 5. La zone 3 - ie la zone du milieu - est supposée être identique au modèle réel. Cette modification engendre une distance calcul essai représentée sur la figure 4.8. Les paramètres de calibration sont  $E_2$  and  $E_4$  tandis que l'on suppose que les méconnaissances sont reportées sur  $E_1$  and  $E_5$ . Ainsi, les définitions de  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{q}$  sont :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} E_1 & E_5 \end{bmatrix}^T \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} E_2 & E_4 \end{bmatrix}^T. \quad (4.54)$$

Les paramètres incertains suivent le modèle d'incertitude info-gap suivant :

$$\mathbf{x} \in \mathcal{U}(\alpha, \mathbf{x}^0) = \left\{ \mathbf{x} : \left| \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}^0}{\mathbf{x}^0} \right| \leq \alpha \right\}, \quad (4.55)$$

$\mathbf{x}^0$  ayant les valeurs nominales indiquées sur le tableau 4.3. Les modes propres que l'on va chercher à étendre sont composés de 4 modes locaux et d'un mode global de cylindre illustrés sur la figure 4.9.

On va chercher à évaluer la fonction robustesse sur l'intervalle  $[0;0.5]$  en ayant discrétisé l'horizon d'incertitude par pas de  $\hat{\alpha}_i = 0.05$ . La qualité de l'expansion est évaluée par l'erreur relative moyenne sur les  $m = 5$  modes à étendre entre les modes réels et les champs étendus

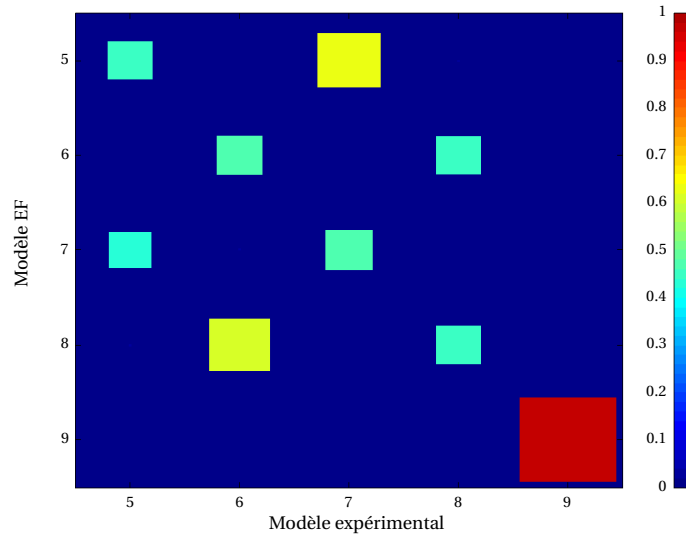


FIG. 4.8: MAC entre le modèle et les essais

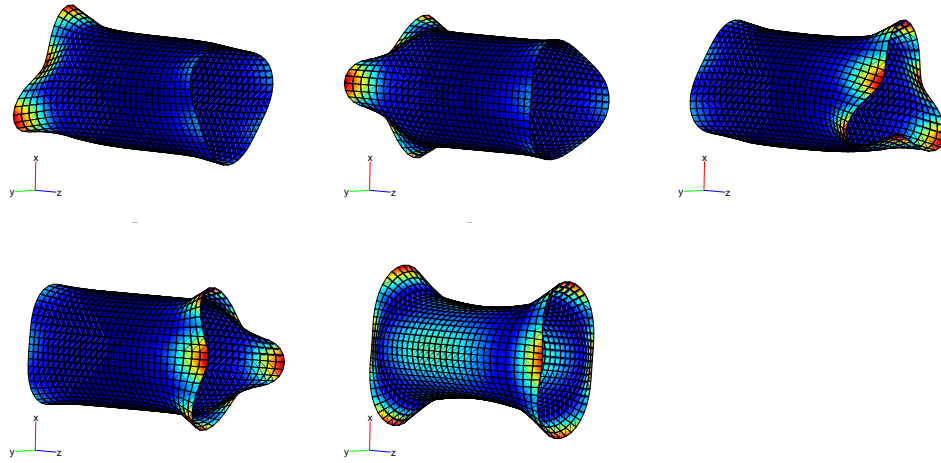


FIG. 4.9: Modes propres réels.

qui s'exprime par

$$s^c = \frac{1}{m} \sum_{v=1}^m \frac{\|\hat{\phi}_v - \phi_v^*\|_2}{\|\phi_v^*\|_2}. \quad (4.56)$$

En présence d'un modèle très simple, comme ici, il est parfois plus rapide et plus fiable d'adopter une approche heuristique. Pour chaque niveau d'incertitude, la fonction coût est évaluée sur chaque borne du domaine d'incertitude. Cette démarche a notamment déjà été utilisée dans [116] et convient bien lorsque peu de paramètres sont en jeu. Dans ce cas particulier, deux paramètres sont supposés être incertains : le domaine d'incertitude est donc

un carré et la fonction coût sera évaluée 4 fois (une fois sur chaque coin). Le modèle nominal est dans un premier temps étudié afin d'évaluer la robustesse de l'expansion vis-à-vis des méconnaissances sur  $E_1$  et  $E_5$  : pour chaque horizon d'incertitude, la fonction coût est évaluée quatre fois, et ces évaluations sont reportées sur la figure 4.10. La courbe de robustesse est finalement obtenue en ne gardant que le maximum de ces quatre points<sup>13</sup>. Ensuite, on

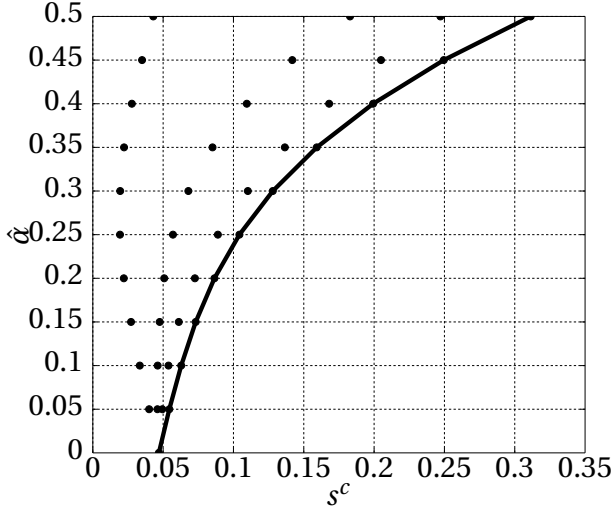


FIG. 4.10: Courbe de robustesse : modèle nominal

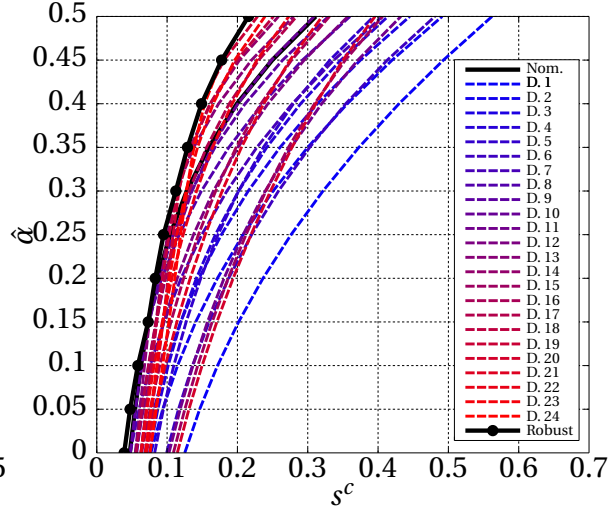


FIG. 4.11: Courbes de robustesse : investigation

recherche dans un espace de conception discret fixé *a priori* - représenté sur la figure 4.12 où chaque point de conception testé est représenté par un disque - si il est possible d'obtenir des paramètres permettant de maximiser la robustesse. Pour chaque point de conception testé, on trace la courbe de robustesse correspondante en suivant la même démarche que pour le modèle initial. La figure 4.11 présente les courbes de robustesse correspondantes pour chacun des 24 points de conception testés. Comme attendu, certains modèles permettent d'étendre les modes expérimentaux de manière plus robuste que d'autres. La courbe noire avec des motifs ronds, dont la légende est *Robust* sur la figure 4.11, représente l'évolution de la plus petite erreur d'expansion maximum possible en fonction de l'horizon d'incertitude : en accord avec les modèles définis précédemment et sous réserve que - pour un niveau de  $\alpha$  donné - le pire cas pour l'expansion se situe bien aux bornes du domaine d'incertitude, il n'est pas possible d'obtenir une erreur d'expansion inférieure à cette courbe lorsque  $\mathbf{x} \in \mathcal{U}(\alpha, \mathbf{x}^0)$  et  $\alpha \in [0; 0.5]$ . Cependant, cette courbe ne correspond pas à un modèle fixe mais fourni une estimation des erreurs idéales que l'on pourrait obtenir. On sélectionne alors les modèles les plus intéressants - en terme de robustesse - représentés sur la

13. Cette approche suppose toutefois que le maximum est obtenu aux bornes du domaine d'incertitude, ce qui est le cas ici puisque l'on considère comme paramètre incertain le module d'Young.

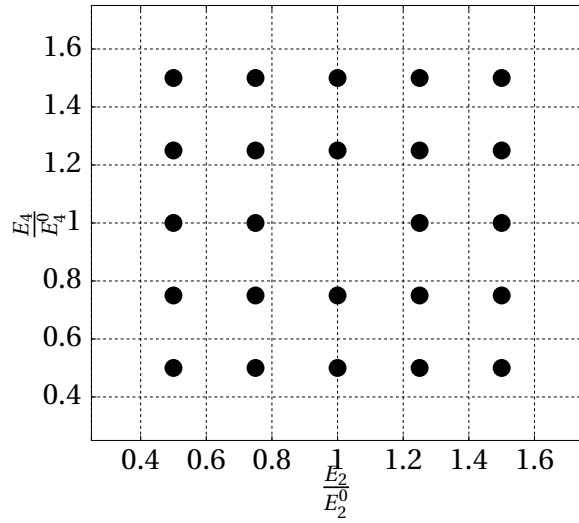


FIG. 4.12: Espace de conception et 24 points testés

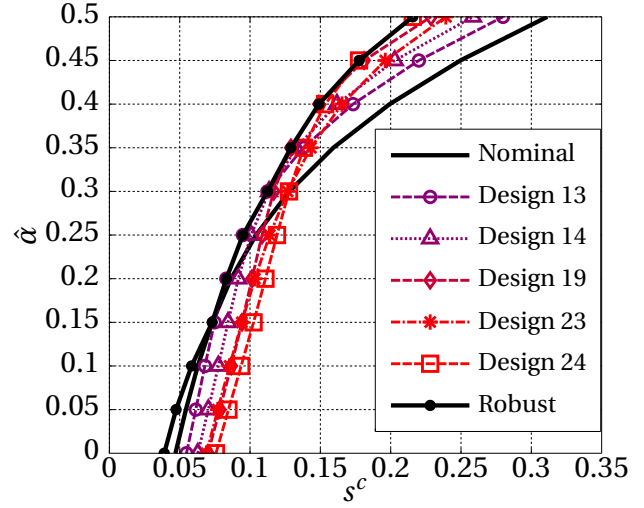


FIG. 4.13: Courbes de robustesse : modèles sélectionnés

figure 4.13. Concrètement, si l'on désire avoir un modèle capable d'étendre les cinq modes expérimentaux en autorisant une méconnaissance de 50 % sur les paramètres incertains (ie  $\alpha = 0.5$ ), on aura tout intérêt à choisir le modèle 24, même si pour  $\alpha = 0$  le modèle initial fournit une erreur inférieure au modèle 24 car la figure 4.13 nous confirme que le modèle initial est moins robuste que le modèle 24. Pour résumer, la figure 4.14 présente les variations des paramètres robustes en fonction du niveau d'incertitude, permettant ainsi de choisir - pour le niveau d'incertitude contre lequel on désire de protéger - les modèles associés.

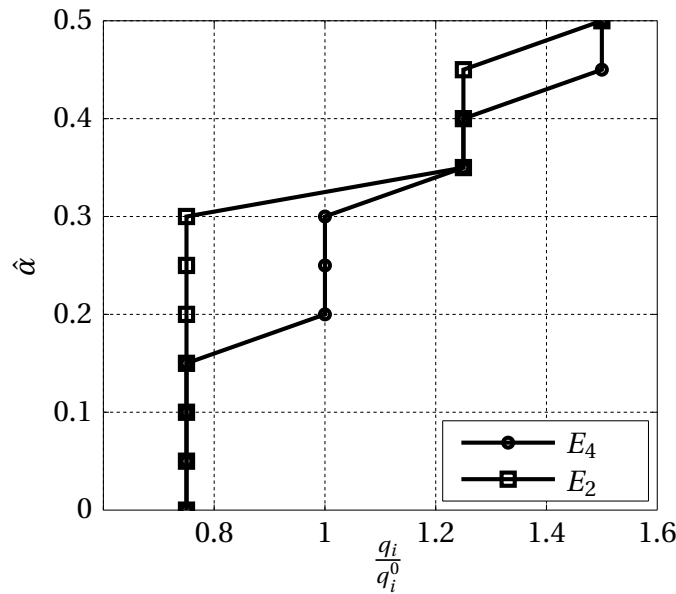


FIG. 4.14: Variations des paramètres robustes en fonction du niveau d'incertitude



Ce cas test permet d'illustrer le théorème 1 : un modèle optimal - au sens où l'erreur d'expansion est la plus faible, ici le modèle nominal - n'a aucune robustesse vis-à-vis des paramètres incertains. La procédure d'expansion robuste permet de choisir un point de conception moins optimal mais plus robuste. Si ce n'est pas le domaine d'incertitude qui nous intéresse mais seulement la valeur de la robustesse  $\hat{\alpha}$ , on pourra utiliser des stratégies tirant profit des propriétés de monotonie des courbes de robustesse [147].

#### 4.4.4 Application industrielle

##### Expansion robuste de modes propres identifiés d'alternateur : investigation

L'exemple précédent illustre le processus d'expansion robuste sur un cas académique où le modèle EF contient peu de ddls et ne s'avère pas complètement représentatif des difficultés numériques rencontrées pour la construction d'un modèle hybride robuste. Dans cette section, on va chercher à appliquer la stratégie d'expansion robuste sur l'alternateur en utilisant la version erreur en raideur seulement avec  $r = 0.5$ . On va donc étendre un sous-ensemble de modes propres identifiés lorsque l'alternateur est à l'arrêt, l'objectif, ici, étant de démontrer la faisabilité et d'identifier les éventuelles difficultés numériques : on utilise  $m = 5$  modes autour de la fréquence d'intérêt de 100 Hz représentés sur la figure 4.15. On dispose, par ailleurs, d'un modèle EF composé d'environ un million de ddls représenté sur la figure 4.16. Dans ce cas précis, nous ne disposons pas des vecteurs propres réels : on va donc évaluer la performance de l'expansion en utilisant un sous-ensemble de capteurs, non utilisé pour l'expansion et situé sur la maillage capteurs comme indiqué la figure 4.17. Ce sous-ensemble est constitué de 7 nœuds à 3 ddls par nœuds. Le nombre et la position sont purement aléatoires et demanderaient à être optimisés (en utilisant par exemple des indicateurs de visibilité [90, 69]). La performance est évaluée par

$$s^c = \frac{1}{m} \sum_{v=1}^m \text{MAC}(\Pi_n^c \hat{\phi}_v, \Pi_t^c \phi_v^t), \quad (4.57)$$

avec  $\Pi_n^c \in \mathbb{R}^{21 \times N}$ , la matrice de passage permettant de projeter les ddls du vecteur étendu  $\hat{\phi}_v$  sur les ddls capteurs non utilisés dans le procédé d'expansion et  $\Pi_t^c \in \mathbb{R}^{21 \times c}$  la matrice de passage permettant de garder uniquement les ddls du vecteur essais  $\phi_v^t$  non utilisés dans le procédé d'expansion. Pour les besoins de l'étude, le paramètre que l'on considère incertain est le module d'Young de l'Isotenax, noté  $E_{\text{iso}}$  de valeur nominale 35 GPa, matériau - considéré comme isotrope - constituant les cônes (en bleu sur la figure 4.18). Ainsi, le paramètre incertain est un scalaire  $x$  de valeur initiale  $x^0 = E_{\text{iso}}$  et est modélisé par le modèle

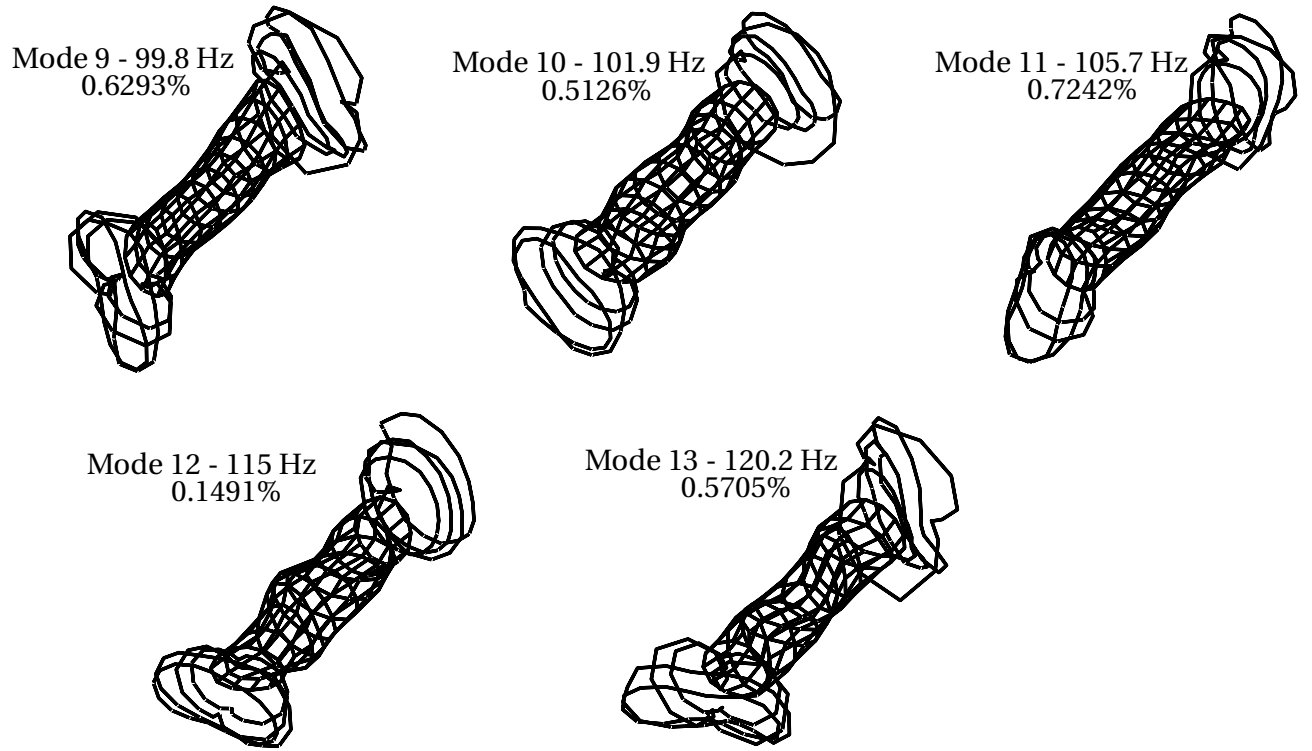


FIG. 4.15: Modes propres d'alternateur à étendre

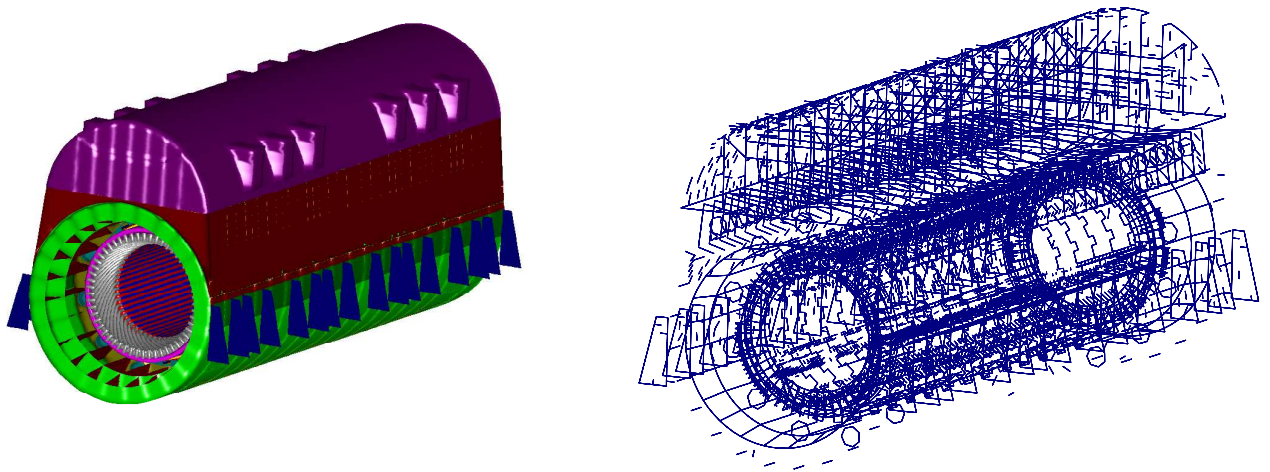


FIG. 4.16: Modèle EF d'un alternateur

d'incertitude info-gap suivant :

$$x \in \mathcal{U}(\alpha, x^0) = \left\{ x : \left| \frac{x - x^0}{x^0} \right| \leq \alpha \right\}, \quad (4.58)$$

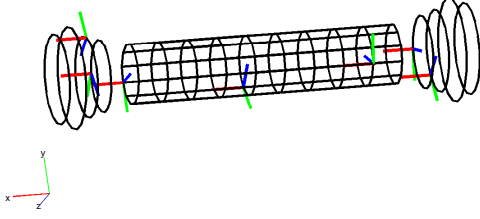


FIG. 4.17: Emplacement des capteurs pour évaluer les erreurs d'expansion

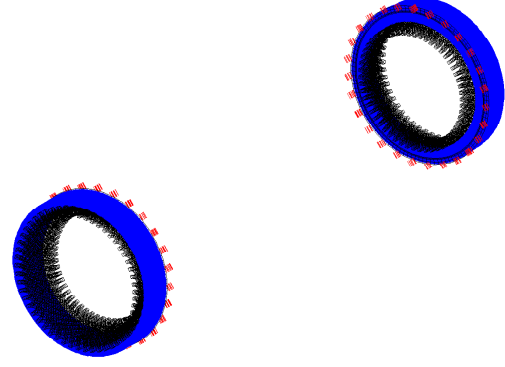


FIG. 4.18: Zones de calibration (en rouge) /incertaine (en bleu)

avec  $\alpha$  l'horizon d'incertitude qui est inconnu. Comme pour l'exemple précédent, le domaine d'incertitude n'est pas complètement parcouru : la fonction coût est évaluée aux bornes - qui évolue en fonction de  $\alpha$  - du paramètre incertain. Les paramètres de calibration sont les diamètres des vis, noté  $d_{\text{vis}}$  de valeur nominale  $q^0 = 30$  mm, qui permettent d'ajuster le niveau de couplage mécanique entre le circuit magnétique et les cages de développantes (en rouge sur la figure 4.18). Ainsi, en accord avec les notations introduites dans la section 4.4.2, le paramètre de calibration  $q$  est :

$$q = d_{\text{vis}}. \quad (4.59)$$

Pour le cas étudié, on se restreint à l'intervalle  $[0;0.5]$  qui est ensuite discrétisé par pas de  $\hat{\alpha}_i = 0.125$ . Pour chaque niveau d'incertitude, on dispose donc d'un problème d'expansion sur le modèle constitué d'un paramètre évoluant dans un intervalle : on évalue alors les paramètres aux bornes de l'intervalle et on choisit le pire cas de performance pour l'expansion. On rappelle que le critère utilisé pour évaluer la performance de l'expansion est le MAC entre les ddls capteurs non retenus pour l'expansion et les ddls correspondant du vecteur étendu. On obtient alors les courbes de robustesse représentées sur la figure 4.19. Le modèle nominal, dont la courbe de robustesse est représentée en noir sur la figure 4.19, semble relativement robuste puisqu'une variation de 50 % du paramètre incertain ( $\hat{\alpha} = 0.5$ ) - le module d'Young de l'Isotenax - entraîne une très faible variation de l'erreur d'expansion. Une calibration du modèle a toutefois été investiguée en vue de tester l'existence d'un modèle plus robuste que le modèle nominal. Les courbes de robustesse en rouge et violet de la figure 4.19 représentent respectivement le modèle lorsque  $q = 1.5 \times q^0$  et lorsque  $q = 0.5 \times q^0$ . D'après la forme et les valeurs des courbes, le modèle à  $q = 0.5 \times q^0$  semble garantir une meilleure<sup>14</sup> erreur d'ex-

14. Comme l'erreur d'expansion dérive du MAC (cf. équation (4.57)), plus  $s^c$  est proche de 1, plus l'erreur d'expansion est faible.

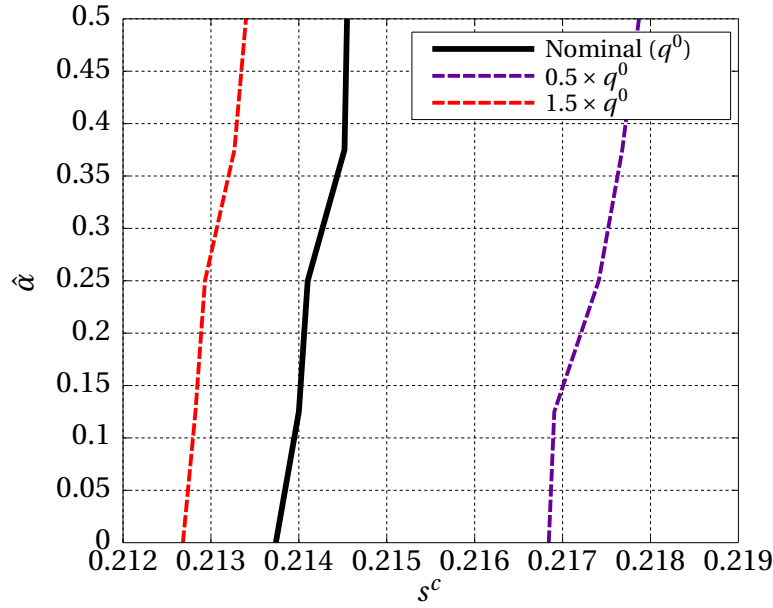


FIG. 4.19: Courbes de robustesse correspondant à différents modèles

pansion tout en étant assez robuste.

Cependant, les résultats sont à prendre avec précaution et les interprétations des courbes demandent à être validées. Les valeurs de MAC sont faibles, elle s'explique assez aisément par la faible capacité de prédiction du modèle EF. Un autre point essentiel à vérifier est la sensibilité des paramètres incertains au modèle de prise de décision (équation (4.50)). Dans le cas présent, on doit d'une part s'assurer que les solutions propres du modèle numérique sont sensibles aux paramètres incertains et d'autre part que les capteurs permettant d'évaluer les erreurs d'expansion observent (au sens de la visibilité) bien cette sensibilité. Pour évaluer cette sensibilité, on effectue une simulation de Monte-Carlo en considérant que l'erreur relative sur le paramètre  $x$  suit une loi uniforme dans l'intervalle  $[0.5; 1.5]$  : 200 tirages sont réalisés. Le tableau 4.4 présente la sensibilité des solutions propres appariées vis-à-vis de  $x$ , évaluée sur la base des deux indicateurs suivants :

- l'erreur relative maximum sur les fréquences propres appariées donnée par

$$\epsilon_f(v) = \max_{\substack{|x-x^0| \\ x^0} \in [0.5; 1.5]} \left\{ \frac{|f_v(x) - f_v^0|}{f_v^0} \times 100 \right\}, \quad (4.60)$$

avec  $f_v^0$  (resp.  $f_v(x)$ ) la fréquence propre lorsque  $x = x^0$  (resp. lorsque l'erreur relative sur le paramètre  $x$  appartient à  $[0.5, 1.5]$ ) ;

- l'erreur relative maximum sur les modes propres appariés restreinte aux ddls de trans-

lation donnée par

$$\epsilon_{\phi}(v) = \max_{\frac{|x-x^0|}{x^0} \in [0.5; 1.5]} \left\{ \frac{\|\phi_v(x) - \phi_v^0\|_2}{\|\phi_v^0\|_2} \times 100 \right\}, \quad (4.61)$$

avec  $\phi_v^0$  (resp.  $\phi_v(x)$ ) la déformée propre du modèle numérique restreinte aux ddls de translation lorsque  $x = x^0$  (resp. lorsque l'erreur relative sur le paramètre  $x$  appartient à  $[0.5; 1.5]$ ).

Modes	9	10	11	12	13
$\epsilon_f$ (en %)	0.61	0.46	0.07	1.75	1.20
$\epsilon_{\phi}$ (en %)	29.5	63.5	64.9	64.8	11.8

TAB. 4.4: Sensibilité sur les solutions propres du modèle EF vis-à-vis du module d'Young de l'Isotenax

Ce tableau confirme que, lorsque  $\frac{|x-x^0|}{x^0} \in [0.5; 1.5]$ , les solutions propres ne sont pas fortement impactées.

On ne peut donc pas clairement délivrer d'enseignements sur la robustesse du modèle. Cependant, les points à garder à l'esprit à l'issue de cette application industrielle sont plutôt les difficultés numériques rencontrées engendrant un temps de construction des modèles hybrides conséquents. On détaille dans la suite ces difficultés.

### Difficultés numériques rencontrées

Comme nous l'avons mentionné précédemment, pour les quatre niveaux d'incertitude non-nuls - ie  $\hat{\alpha}_i = \{0.125; 0.25; 0.375; 0.5\}$  - on évalue l'erreur d'expansion aux bornes du paramètre incertain. En ajoutant l'évaluation de la performance lorsque  $\hat{\alpha} = 0$ , on a donc évalué  $4 \times 2 + 1 = 9$  fois la fonction coût pour obtenir une courbe de robustesse. Sur la figure 4.19, trois courbes de robustesse sont présentées, on a donc effectué  $9 \times 3 = 27$  évaluations au total. On précise également qu'une évaluation implique l'expansion des 5 modes identifiés sur le modèle EF : on a réalisé  $27 \times 5 = 135$  expansions. L'expansion d'un mode nécessite la résolution d'un système linéaire du type

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}. \quad (4.62)$$

La matrice  $\mathbf{A}$  est de taille  $2N \times 2N$ , avec  $N$  le nombre de ddls actifs (sans C.L.) du modèle EF. Ici,  $N = 945876$  ddls actifs, la dimension de  $\mathbf{A}$  est donc  $\dim(\mathbf{A}) = 1891752$ . Bien que la matrice

A soit carrée, réelle et symétrique, la résolution du système linéaire (4.62) est très défavorable d'un point de vue numérique, et ce, pour plusieurs raisons :

- A n'est pas définie positive ;
- A possède une grande largeur de bande ;
- A, définie comme combinaison de matrices EF, est très mal conditionnée ;
- **b** est proche du vecteur **0**, sauf aux ddls capteurs dans la partie non-nulle de **b**.

La figure 4.20 représente la topologie des termes non-nuls de la matrice A et permet d'illustrer ses propriétés mathématiques. On s'aperçoit notamment que la grande largeur de bande ainsi que la forme très creuse du bloc (2,2) vont poser des problèmes numériques lors d'opérations liées à la résolution directe de (4.62).

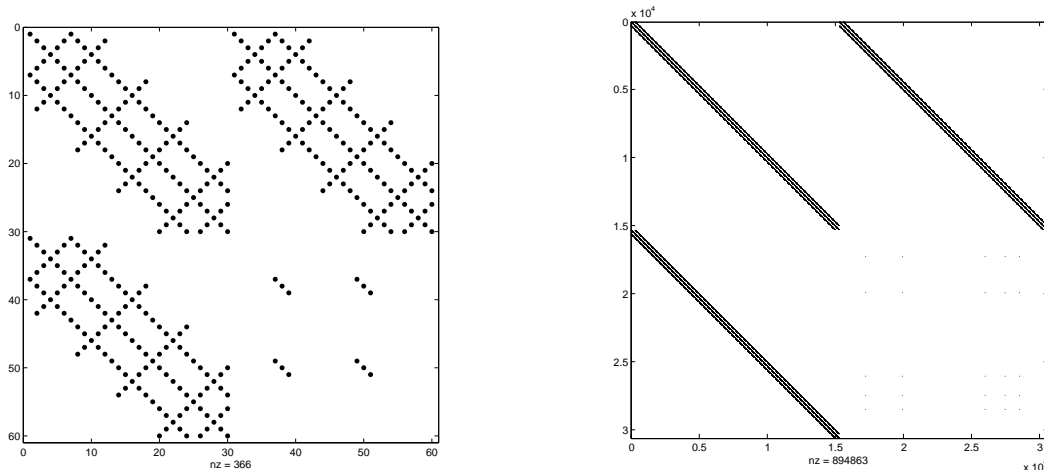


FIG. 4.20: Localisation des termes non-nuls de A pour différentes tailles de modèles EF (*N* petit (resp. grand) à gauche (resp. droite))

La résolution est effectuée, de manière directe, sur Nastran en langage DMAP (*Direct Matrix Abstraction Program*<sup>15</sup>). La démarche consiste à effectuer tout d'abord une factorisation LU, avec le module DECOMP, sur la matrice A. Le module DECOMP divise la factorisation en deux étapes (cf. chapitre 3.2 dans [77]) : une factorisation symbolique, et une factorisation numérique. À cause de la grande largeur de bande de A, une matrice de passage doit être construite afin de réorganiser les termes de la matrice A pour réduire sa largeur de bande. Dans le cas où *N* est grand - ce qui est le cas ici - c'est cette phase qui pose des problèmes de temps de calculs. En effet, il est connu que la factorisation symbolique de matrices creuses est NP-complet : il n'existe pas d'algorithme de renumérotation optimal dont le coût ne varie pas exponentiellement [112]. Ensuite, une fois la matrice décomposée, on effectue une

15. Le DMAP est le langage utilisateur Nastran et permet d'exécuter des modules (=opérations matricielles élémentaires) constitués d'un ensemble de sous-routines Fortran.

remontée associée à une descente avec l'aide du module FBS (*Forward Backward Substitution*).

Pour diminuer le temps de calcul lié à la factorisation symbolique et plus globalement le temps de calcul, plusieurs possibilités s'offrent à nous. On pourrait utiliser des techniques numériques itératives de résolution de systèmes linéaires [127]. Notamment, les techniques basées sur le théorème du point fixe semblent fournir un cadre intéressant à la résolution du système. Par exemple, la méthode de surrelaxation successive, qui est une variante de la méthode de Gauss-Seidel, a été utilisée récemment pour résoudre le système ERCE [18]. Cependant, cette méthode requiert la définition d'un paramètre de relaxation qui n'assure pas la convergence vers le point fixe. En fait, la résolution du système est un problème de point-selle, une autre possibilité est donc d'utiliser la méthode des noyaux [25]. Toutefois, ces méthodes ne permettent pas d'obtenir la solution en un nombre fixe d'opérations. D'autre part, des pré-conditionneurs doivent généralement être utilisés et l'obtention de bons pré-conditionneurs lorsque  $\mathbf{A}$  évolue est loin d'être évidente.

Nous nous sommes donc plutôt concentrés sur des techniques de résolution directe du système (4.62). Une inversion par bloc, basée sur le calcul du complément de Schur, a tout d'abord été testée. Le système linéaire (4.62) se réécrit par bloc de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix}. \quad (4.63)$$

Le complément de Schur de  $\mathbf{A}_{11}$  dans  $\mathbf{A}$  donne

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_2 &= (\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12})\mathbf{b}_2 \\ \mathbf{x}_1 &= \mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{x}_2. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Cependant, cette inversion par bloc nécessite le stockage de  $\mathbf{A}_{11}^{-1}$  qui sera pleine puisque  $\mathbf{A}_{11}$  est creuse, ce qui n'améliore pas la résolution (le calcul s'est arrêté car la mémoire temporaire - dont la capacité est de 500 GB - est remplie).

Nous avons également testé les différents algorithmes de permutation disponible (*Multiple minimum degree, Extreme, Metis, MLV*,...) sous Nastran et permettant de réduire la largeur de bande de  $\mathbf{A}$ . Les différents essais nous conduisent à utiliser la technique de renumérotation Metis [101]. Nous l'utiliserons dans la suite.

Comme indiqué sur la figure 4.20, la diagonale de  $\mathbf{A}$  est nulle sur le bloc (2,2), ce qui dégrade les temps de décomposition. Des essais numériques ont montré que l'ajout d'un *shift* sur

cette partie de la diagonale tend à améliorer le temps de décomposition. La figure 4.21 présente, en bleu, l'évolution du MAC moyen (sur les  $m = 5$  modes étendus) entre les vecteurs étendus de référence et ceux obtenus en utilisant cette technique en fonction de la valeur du *shift*, notée  $\kappa$ . On remarque que plus  $\kappa$  augmente, plus le MAC moyen se dégrade, ce qui semble logique étant donné que des ddls théoriquement non chargés dans la matrice  $\mathbf{A}$  ont un poids de plus en plus important. La figure 4.21 présente également, en vert, l'évolution relative du gain du temps moyen associé à la décomposition par rapport au temps initial (initialement 17 050 s CPU<sup>16</sup>). On remarque, ici, que plus  $\kappa$  augmente, plus le temps de décomposition diminue, ce qui semble logique puisque la topologie de la matrice avec une diagonale non-nulle est plus favorable pour la décomposition. Finalement, la figure 4.21 permet d'obtenir le meilleur compromis performance/perde de précision : la valeur optimale retenue est  $\kappa^* = 500$ . Après ces essais, l'expansion d'un mode passe d'un temps de calcul initial de 5h environ à 3h environ (une diminution de 50% relatif au temps de décomposition initial a été obtenue). Ainsi, le processus d'expansion robuste ayant nécessité 135 expansions de mode, nous avons un temps de calcul total de  $135 \times 3 = 405$ h (soit environ 15 jours). Afin de diminuer les temps de calcul liés à la construction des modèles hybrides, nous proposons de réduire le système (4.62) : c'est l'objet du chapitre suivant.

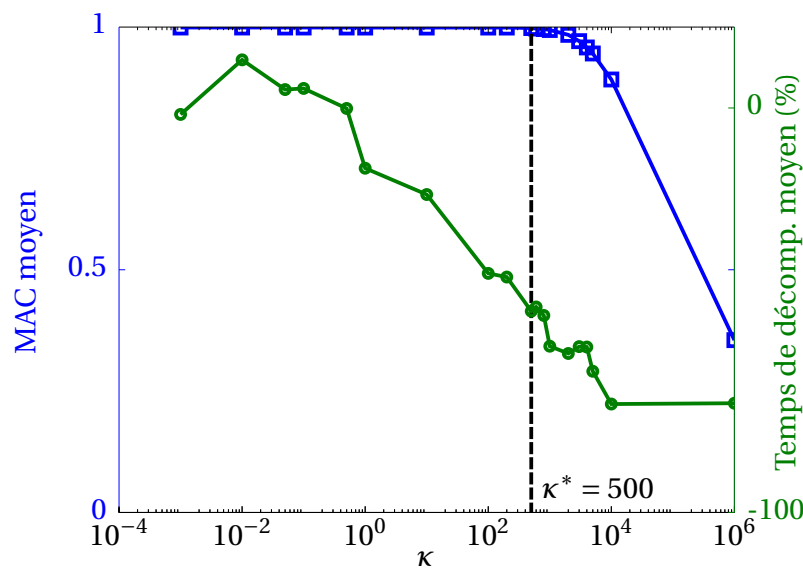


FIG. 4.21: Choix de  $\kappa$  pour le compromis temps de décomposition / précision

16. Calculs réalisés sur cluster Intel 64 bit - 2GHz et de RAM 36GB.



## 4.5 Bilan

La construction d'un modèle hybride implique l'utilisation de méthodes d'expansion dans une démarche de sélection de modèle robuste. Les méthodes d'expansion basées sur la minimisation de l'ERCE sont utilisées dans ce travail. En effet, outre l'illustration de leurs comportements robustes vis-à-vis du bruit de mesure, nous avons également signalé la capacité de l'expansion ERCE à retrouver les vecteurs réels lorsque la qualité du modèle EF est dégradée. Partant du constat que calibrer un modèle en se concentrant uniquement sur des exigences de fidélité vis-à-vis des données n'assure pas la robustesse du modèle, une procédure d'expansion robuste a ensuite été formulée, basée sur le cadre offert par la théorie info-gap.

Plusieurs applications, académique et industrielle, ont été proposées. Bien sûr, les applications que l'on a proposées se réduisent à considérer des paramètres comme incertains. En théorie, il serait plus séduisant de considérer les modèles comme incertains dans leurs globalités - plutôt que la restriction à des paramètres. En pratique, cela semble difficile à appliquer.

Cependant, il est important de signaler que suivre cette démarche n'assure pas - dans tous les cas - de gains effectifs, comme nous avons pu l'illustrer sur le modèle hybride d'alternateur. Les investigations que l'on a pu mener montrent que lorsque la fonction coût comprend un phénomène régularisant comme l'expansion, il est plus difficile d'obtenir des gains effectifs. En effet, il est parfaitement possible de se retrouver dans des cas où la confrontation calcul essai n'est pas pleinement satisfaisante et tout de même obtenir un vecteur étendu de bonne qualité, c'est à dire proche du vecteur réel (cf. la deuxième illustration proposée en section 4.3.3). Il est dès lors plus délicat de « robustifier » un modèle - c'est à dire le rendre plus robuste - puisque le vecteur étendu est moins sensible aux variations paramétrique du modèle EF que ses solutions propres. Nous ne sommes pas confrontés à ce problème lorsque la performance est directement liée à la distance calcul essai. Sur la base des investigations que l'on a pu mener, un critère nécessaire - mais non suffisant - pour l'obtention de gains potentiels en suivant une démarche robuste semble être la sensibilité du modèle de prise de décision vis-à-vis des paramètres incertains. Cela reste une hypothèse et demanderait à être plus rigoureusement approfondi lors de futurs travaux.

Bien que l'application industrielle ne permette pas de tirer de conclusions claires sur la robustesse du modèle, elle a notamment permis de mettre en évidence les difficultés numériques liées à la résolution du système linéaire découlant de l'ERCE. Afin de lever ces difficultés, nous avons proposé plusieurs possibilités. L'ajout d'un *shift* ainsi que l'utilisation de la

technique de renumérotation Metis a permis de diminuer les temps de calculs associés à la décomposition de 50 %. Cependant, les temps de calculs sont toujours conséquents et c'est la raison qui a motivée le chapitre suivant dont un des objectifs est l'étude de méthodes de réduction adaptées à l'ERCE.

---

---

# Chapitre 5

## Vers une application industrielle

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Introduction . . . . .</b>	<b>102</b>
<b>5.2</b>	<b>Méthodes de réanalyse approchée . . . . .</b>	<b>103</b>
5.2.1	Développement en série de Taylor . . . . .	104
5.2.2	Réanalyse sur base de projection . . . . .	105
5.2.3	Bilan sur l'état de l'art . . . . .	108
<b>5.3</b>	<b>Réanalyse adaptée à l'ERCE . . . . .</b>	<b>109</b>
5.3.1	Stratégie de réduction adaptée à l'ERCE . . . . .	109
5.3.2	Méthodes de réduction adaptées à l'ERCE : illustration . . . . .	110
5.3.3	Bilan . . . . .	114
<b>5.4</b>	<b>Application industrielle . . . . .</b>	<b>114</b>
5.4.1	Description du système et objectifs . . . . .	114
5.4.2	Calculs préliminaires : analyse de sensibilité . . . . .	119
5.4.3	Cas 1 : restriction à deux paramètres pour une prédiction robuste . . .	120
5.4.4	Cas 2 : étude à neuf paramètres pour une prédiction robuste . . . . .	130
<b>5.5</b>	<b>Bilan . . . . .</b>	<b>136</b>

---

## 5.1 Introduction

On présente, dans ce chapitre, quelques applications visant à illustrer la construction de modèles robustes pour la prédiction du comportement vibratoire. Comme cela a été indiqué en introduction de ce mémoire, la construction d'un modèle hybride robuste nécessite, d'une part, la résolution de plusieurs systèmes linéaires de taille  $2N \times 2N$ , où  $N$  est le nombre de ddl actifs du modèle EF, et, d'autre part la résolution d'un problème d'optimisation pour trouver les paramètres robustes. La recherche de ces paramètres robustes est effectuée en définissant *a priori* un espace de variation paramétrique au niveau du modèle EF : on parle alors de modèle EF paramétré<sup>1</sup> [14]. Le coût de calcul associé à la construction du modèle hybride robuste est donc conséquent. On doit alors trouver des stratégies permettant d'évaluer, à moindre coût, l'impact de variations paramétriques sur des sorties d'intérêt.

Les méthodes de réduction adaptées à la résolution de problèmes paramétrés, ou méthodes de réanalyse, constituent une première possibilité intéressante. On propose à la section 5.2 de décrire les principales méthodes de réanalyse. Lorsque ces méthodes sont appliquées au système linéaire découlant de l'ERCE, il existe plusieurs stratégies : ces points sont discutés en section 5.3.1. On illustrera ensuite le potentiel de ces méthodes à résoudre de tels systèmes sur une structure académique à la section 5.3.2.

Une autre possibilité pour évaluer l'impact de variations paramétriques sur des sorties d'intérêt est d'utiliser des métamodèles (aussi appelés surfaces de réponse, émulateurs, modèle proxy, *surrogate models*, etc) car ils constituent une alternative à l'évaluation des paramètres de sortie par un modèle numérique. Un métamodèle est une représentation du modèle numérique qui ne s'intéresse qu'aux entrées et sorties du modèle. Les méthodes les plus couramment utilisées sont les méthodes polynomiales [102], les réseaux de neurones [40] ou encore les modèles de krigeage [128]. On citera, par exemple, les travaux de Pillet [117] qui utilisent ces stratégies pour analyser rapidement la robustesse de la probabilité de défaillance d'un système vis-à-vis de méconnaissances sur les lois de probabilité. Hemez [59] utilise également intensivement ces techniques sur des problématiques de validation de modèle. On proposera, à la section 5.4, deux applications sur un système industriel visant à construire un modèle robuste en s'appuyant sur des métamodèles.

---

1. Plus généralement, on se place dans le cadre de la résolution d'équations aux dérivées partielles paramétrées. Au niveau sémantique, on parle de **réanalyse** lorsque l'on cherche à prédire l'impact d'une modification affectant les matrices EF sur des sorties d'intérêt et on qualifie le problème inverse de réanalyse - à savoir quelles variations paramétriques doit-on opérer sur les matrices EF pour satisfaire un critère de performance donnée - de **modifications structurales**.

## 5.2 Méthodes de réanalyse approchée

De façon générale, les méthodes décrites, dans cette section, s'attachent à réduire les problèmes aux valeurs propres paramétrés suivants :

$$\mathbf{K}(\mathbf{p}) \Phi = \Lambda \mathbf{M}(\mathbf{p}) \Phi, \quad (5.1)$$

avec  $\mathbf{K}(\mathbf{p})$  et  $\mathbf{M}(\mathbf{p})$  respectivement les matrices de raideur et de masse et  $(\Lambda, \Phi)$  respectivement les matrices spectrale et modale. Le vecteur  $\mathbf{p}$ , de valeur nominale  $\mathbf{p}^0$ , regroupe l'ensemble des paramètres du modèle EF susceptibles d'être modifiés. La résolution de l'équation (5.1) est généralement connue lorsque  $\mathbf{p} = \mathbf{p}^0$  : dans ce cas les matrices du modèle sont notées

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_0 &= \mathbf{K}(\mathbf{p}^0) \\ \mathbf{M}_0 &= \mathbf{M}(\mathbf{p}^0), \end{aligned} \quad (5.2)$$

et on notera

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{K} &= \mathbf{K} - \mathbf{K}_0 \\ \Delta \mathbf{M} &= \mathbf{M} - \mathbf{M}_0, \end{aligned} \quad (5.3)$$

la dépendance en  $\mathbf{p}$  étant implicite dans ces expressions. Dans le cas de modifications paramétriques de  $n_p$  paramètres  $p_i$  - avec  $i \in \{1, \dots, n_p\}$  et  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n_p \times 1}$  -, les matrices de perturbations  $\Delta \mathbf{K}$  et  $\Delta \mathbf{M}$  ne sont généralement que partiellement affectées. Il est alors possible d'écrire

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{K} &= \sum_{i=1}^{n_p} \mathbf{K}_{\Delta p_i}^{\text{zone}} \\ \Delta \mathbf{M} &= \sum_{i=1}^{n_p} \mathbf{M}_{\Delta p_i}^{\text{zone}}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

avec  $\mathbf{K}_{\Delta p_i}^{\text{zone}}$  et  $\mathbf{M}_{\Delta p_i}^{\text{zone}}$  deux matrices creuses dont seules les coefficients associés aux ddl des éléments concernés par la modification  $\Delta p_i$  sont non nuls. Il est également courant [14, 82, 116] de factoriser ces matrices afin de les exprimer sous la forme d'une somme pondérée de matrices indépendantes des amplitudes des paramètres de modifications

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\Delta p_i}^{\text{zone}} &= \frac{\Delta p_i}{p_i} \sum_{j=1}^{n_\alpha} \alpha_j p_i^{\alpha_j} \mathbf{K}_j^{\text{zone}} \\ \mathbf{M}_{\Delta p_i}^{\text{zone}} &= \frac{\Delta p_i}{p_i} \sum_{j=1}^{n_\beta} \beta_j p_i^{\beta_j} \mathbf{M}_j^{\text{zone}}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

où  $\mathbf{K}_j^{\text{zone}}$  et  $\mathbf{M}_j^{\text{zone}}$  sont deux matrices représentatifs des directions du sous-espace engendré par les modifications : ces matrices ne dépendent pas des amplitudes des modifications. Les paramètres  $p_i$  pouvant intervenir de façon non-linéaire sur les matrices de perturbations, des coefficients  $\alpha_j$  et  $\beta_j$  sont introduits. C'est, par exemple, le cas pour l'épaisseur dans la matrice de raideur d'un élément plaque ou coque. L'utilisation des matrices de perturbation

dans la construction des bases de réduction implique, au préalable, une paramétrisation du modèle EF permettant ainsi d'exprimer les matrices de perturbation sous la forme exprimée aux équations (5.4) et (5.5), ce qui sera fait dans la suite. Toutefois, il est important de noter que la paramétrisation du modèle, telle que formulée ici, implique de travailler sur des problèmes à maillage constant, ce qui peut être problématique lorsque l'on cherche à évaluer l'impact d'une modification géométrique sur un système. Dans ce travail, les modifications considérées ne nécessitent pas un remaillage du modèle.

### 5.2.1 Développement en série de Taylor

La résolution de problèmes paramétrés, notamment lorsque la variation paramétrique est faible, peut être efficace en utilisant un développement en série de Taylor pour approximer le couple solution de l'équation (5.1). On rappelle que, pour une fonction quelconque  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable au voisinage de  $a^0 \in \mathbb{R}$ , l'approximation de  $f(a)$ , avec  $a \in \mathbb{R}$  par une série de Taylor à l'ordre  $N$  s'écrit :

$$f(a) \approx f(a_0) + \frac{df(a_0)}{dx} (a - a_0) + \sum_{i=2}^n f^{(i)}(a_0) \frac{(a - a_0)^i}{i!}, \quad (5.6)$$

où  $f^{(i)}(a_0)$  représente la dérivée d'ordre  $i$  au point  $a_0$ . Lorsque ce développement est tronqué à l'ordre  $n = 1$ , on obtient la méthode de réanalyse par sensibilité<sup>2</sup>. Lorsqu'il est, de plus, appliqué à la résolution du problème aux valeurs propres paramétré (5.1), on peut exprimer analytiquement les sensibilités des solutions propres vis-à-vis du paramètre  $p_i \in \mathbb{R}$  avec  $i \in \{1, \dots, \dim(\mathbf{p})\}$ . La sensibilité de la pulsation propre  $\omega_v$  du mode  $v$  vis-à-vis du paramètre  $p_i$  s'obtient par

$$\frac{\partial \omega_v}{\partial p_i} = \boldsymbol{\phi}_v^T \left( \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial p_i} - \omega_v^2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p_i} \right) \boldsymbol{\phi}_v, \quad (5.7)$$

tandis que la sensibilité du vecteur propre  $\boldsymbol{\phi}_v$  du mode  $v$  vis-à-vis du paramètre  $p_i$  s'obtient après la résolution de

$$\frac{\partial \boldsymbol{\phi}_v}{\partial p_i} = \boldsymbol{\theta}_v - \left( \boldsymbol{\phi}_v^T \mathbf{M} \boldsymbol{\theta}_v + \frac{1}{2} \boldsymbol{\phi}_v^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_v \right) \boldsymbol{\phi}_v, \quad (5.8)$$

où  $\boldsymbol{\theta}_v$  est une solution particulière de

$$(\mathbf{K} - \omega_v^2 \mathbf{M}) \boldsymbol{\theta}_v = \left( -\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial p_i} + \frac{\partial \omega_v^2}{\partial p_i} \mathbf{M} + \omega_v^2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p_i} \right) \boldsymbol{\phi}_v \quad (5.9)$$

---

2. Les termes d'ordre 1 sont les termes de sensibilités : ils expriment la sensibilité des solutions propres vis-à-vis de la variation paramétrique. Ces termes de sensibilité sont toutefois calculés localement - ils sont basés sur une linéarisation du problème - et on les distingue des termes de sensibilité calculés globalement (par exemple avec la méthode FAST).

en fixant à 0 une des composantes du vecteur [105]. Les dérivées partielles sont généralement calculées par différences finies ou par superposition modale [47], ce qui est non intrusif dans le code EF. Cependant, le calcul des termes de sensibilité est connu pour être coûteux, car il doit être effectué pour tous les couples de fréquences propres et vecteurs propres et a, de plus, la dimension du nombre de ddl dans le modèle. Bien que l'on puisse également exprimer analytiquement le développement en série de Taylor à des ordres  $n > 1$ , à titre d'exemple, le calcul des termes du second ordre devient rapidement coûteux puisque pour chaque solution propre, il existe  $\dim(\mathbf{p})^2$  paramètres [36]. Pour y remédier, une méthode originale de calcul des dérivés d'ordre strictement supérieur à 1 par les nombres hyper-duaux a récemment été proposée dans [29].

### 5.2.2 Réanalyse sur base de projection

Pour résoudre efficacement l'équation (5.1), on peut également s'appuyer sur une base de réduction. On choisit donc  $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{N,m}$  de rang plein, avec  $m \ll N$  tel que

$$\mathbf{T}^T \mathbf{K}(\mathbf{p}) \mathbf{T} \mathbf{q} = \omega_v \mathbf{T}^T \mathbf{M}(\mathbf{p}) \mathbf{T} \mathbf{q}. \quad (5.10)$$

Même si la topologie initialement creuse des matrices EF - donc très favorable pour les calculs numériques - peut être perdue au profit d'une topologie pleine, la résolution de l'équation (5.10) est généralement plus rapide que celle de l'équation (5.1) car  $m \ll N$ . Les bases de réduction sont construites avant de conduire un problème paramétré donné, une difficulté principale associée est donc de s'assurer que les bases utilisées soient robustes sur tout l'espace de variation des paramètres : la base doit être prédictive sur l'ensemble de cet espace.

Une première approche pour construire cette base de réduction est d'utiliser une projection de type Rayleigh-Ritz :

$$\mathbf{T} = \mathbf{\Phi}_0 = \begin{bmatrix} \phi_1 & \cdots & \phi_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N,m}, \quad (5.11)$$

avec  $\mathbf{\Phi}_0$ , la base modale tronquée du système initial. Cette base fonctionne bien lorsque la modification paramétrique est faible en amplitude. Lorsqu'elle est forte en amplitude, elle doit être distribuée globalement, de telle sorte qu'elle n'affecte pas les vecteurs propres : dans ces deux cas,  $m$  est faible. Dans les cas contraires, il est nécessaire d'enrichir la base de réanalyse. L'élargissement de la base modale - en augmentant  $m$  - montre sur des cas académiques (poutre, plaque) une amélioration de la prédictivité de la base. Cependant, sur des cas plus complexes, la convergence de la base demeure extrêmement lente, entraînant des coûts de calcul importants. Il faut, dès lors, trouver des stratégies permettant d'enrichir la base de Ritz initiale par une base de taille minimale tenant compte des modifications.



Une première possibilité est d'enrichir la base de Ritz par les vecteurs de sensibilité vis-à-vis du paramètre  $p_i$  [14]

$$\mathbf{T} = \left[ \Phi_0 \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial p_i} \quad \dots \quad \frac{\partial \Phi_m}{\partial p_i} \right]. \quad (5.12)$$

Afin de garantir un rang maximum, on effectue une décomposition en valeurs singulières. La taille de la base dépend donc du nombre de valeurs singulières retenues. Pour les cas et méthodes testés, la dernière valeur singulière retenue  $\sigma_m$  sera donnée par [32]

$$\sigma_m \leq \sigma_1 \times 10^{-5}, \quad (5.13)$$

avec  $\{\sigma_1, \dots, \sigma_s\}$  les valeurs singulières rangées par ordre décroissant. Une généralisation de la base (5.12) - qui préserve seulement le comportement dynamique localement - consiste à l'enrichir par la base modale associée à un autre point de l'espace de conception [14] préservant ainsi le comportement dynamique sur une plus large bande de l'espace de conception. Soit  $\Phi(p_i)$  la matrice modale calculée au point de conception  $p_i$ , alors la base de réduction multi-modèle s'écrit :

$$\mathbf{T} = \left[ \Phi(p_1) \quad \dots \quad \Phi(p_i) \quad \dots \right]. \quad (5.14)$$

Naturellement, la construction d'une telle base nécessite de résoudre plusieurs problèmes aux valeurs propres, ce qui peut être coûteux. D'autre part, les modifications paramétriques sont susceptibles de fournir des modes propres assez proches<sup>3</sup>, l'information dans la base serait alors redondante. Afin de garantir un rang maximum dans la base, on effectue comme précédemment une décomposition en valeurs singulières de la base. La base est ainsi prédictive pour chacune des valeurs échantillonnées et est très bonne pour les points intermédiaires. Cependant, lorsque le nombre de paramètres est important, il est nécessaire de considérer plus d'échantillons, ce qui augmente la taille de base.

Une autre possibilité pour enrichir la base est de considérer les modifications paramétriques apportées au système comme étant un effort extérieur [27, 82, 86], ce qui s'écrit

$$(\mathbf{K}_0 - \omega_v^2 \mathbf{M}_0) \boldsymbol{\phi}_v = \mathbf{f}_\Delta, \quad (5.15)$$

avec

$$\mathbf{f}_\Delta = -(\Delta \mathbf{K} - \omega_v^2 \Delta \mathbf{M}) \boldsymbol{\phi}_v. \quad (5.16)$$

L'équation (5.16) n'est pas calculée directement puisque la réponse  $\boldsymbol{\phi}_v$  est inconnue. Elle est néanmoins utilisée pour construire une base de force  $\mathbf{F}_\Delta$  représentative du sous-espace associé à chaque modification, ce qui est fait en injectant la réponse du modèle nominal

---

3. C'est, par exemple, le cas si l'on fait varier l'épaisseur des éléments coques dans le cas d'une plaque encastrée à ses bords.

$\phi_v^0$  à l'équation (5.16). Cette base de force est ensuite utilisée pour générer des vecteurs de réponse statique  $\mathbf{R}_\Delta$  en utilisant le modèle initial.

$$\mathbf{R}_\Delta = \mathbf{K}_0^{-1} \mathbf{F}_\Delta. \quad (5.17)$$

Celle-ci est ensuite soumise à une décomposition en valeurs singulières afin de garantir un rang maximum, noté  $\mathbf{R}_\Delta^*$ . La base de réduction est finalement

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \Phi_0 & \mathbf{R}_\Delta^* \end{bmatrix}. \quad (5.18)$$

Cette méthode a notamment été appliquée aux cas de structures présentant de faibles non-linéarités [27], aux cas de sous-structuration dynamique [86] et également à des perturbations de type non-paramétrique [32].

Même si elles ne seront pas utilisées dans la suite, il est important de noter la possibilité d'utiliser des méthodes dérivées de la décomposition en modes propres orthogonaux (POD pour *Proper Orthogonal Decomposition*) comme la méthode des bases réduites [83, 113, 28]. Cette classe de méthode permet de construire des bases constituées de clichés (*snapshot*) correspondant à des réponses calculées pour certaines valeurs de paramètres (ce qui est qualifié de phase *offline*). Associée à un procédé d'orthonormalisation, la base est ensuite utilisée pour réduire le système complet et conduire rapidement des calculs paramétrés (ce qui est qualifié de phase *online*). Le choix des réponses est alors optimisé par un algorithme glouton (*greedy algorithm*) qui permet de choisir les clichés de manière à borner l'erreur maximale. L'approche semble bien convenir au traitement d'équations aux dérivées partielles non-linéaires, comme celles rencontrées en mécanique des fluides. On notera que, dans [71], la méthode des bases réduites a été récemment utilisée pour réduire le système ERCE.

Initialement développée dans [73] pour la réanalyse de problème de statique, la méthode des approximations combinées a été construite avec l'objectif d'unifier les approches de réanalyse locale, comme le développement en série de Taylor, et les approches de réanalyse globale, comme l'utilisation de bases réduites : elle considère les termes d'une approximation locale en série binomiale comme étant les vecteurs d'une base de réduction globale. Partant du problème de réanalyse formulé à l'équation (5.1), on obtient :

$$(\mathbf{K}_0 + \Delta \mathbf{K}) \Phi = \Lambda \mathbf{M} \Phi. \quad (5.19)$$

On construit, par itération, une base  $\mathbf{R}$  de la manière suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{K}_0 \mathbf{R}_0 = \mathbf{M} \Phi_0 \\ \mathbf{R}_{i+1} = -\mathbf{B} \mathbf{R}_i, \end{cases} \quad (5.20)$$

avec  $\mathbf{B} = \mathbf{K}_0^{-1} \Delta \mathbf{K}$  qui prend en compte les modifications apportées en raideur au système dans la construction des vecteurs de base<sup>4</sup>. On notera que les modifications en masse sont incluses dans le premier ensemble de vecteurs de base. La base finale  $\mathbf{R}$  est obtenue en concaténant les bases à chaque itération :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0 & \mathbf{R}_1 & \cdots & \mathbf{R}_i & \cdots & \mathbf{R}_s \end{bmatrix}. \quad (5.21)$$

On régularise, ensuite, les vecteurs de base en appliquant une procédure d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Il faut, cependant, veiller à utiliser un produit scalaire pondéré en masse. Les vecteurs sont normalisés de manière à satisfaire :

$$\mathbf{R}_i^T \mathbf{M} \mathbf{R}_j = \delta_{ij} \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, s\}. \quad (5.22)$$

Enfin, il est important de noter que, après régularisation, les informations peuvent être redondantes : on applique donc une décomposition en valeurs singulières sur la base  $\mathbf{R}$  afin d'obtenir une base de rang maximum.

Comme nous l'utiliserons dans la section 5.3.2, nous proposons de décrire la méthode des approximations combinées adaptée à la résolution de problème de réanalyse statique :

$$(\mathbf{K}_0 + \Delta \mathbf{K}) \mathbf{x} = \mathbf{f}, \quad (5.23)$$

avec  $\mathbf{x}$  la réponse en déplacement à l'effort  $\mathbf{f}$  appliquée au système de raideur  $\mathbf{K}_0 + \Delta \mathbf{K}$ . La base  $\mathbf{R}$  est construite par récurrence de la manière suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{K}_0 \mathbf{R}_0 = \mathbf{f} \\ \mathbf{R}_{i+1} = -\mathbf{B} \mathbf{R}_i, \end{cases} \quad (5.24)$$

avec  $\mathbf{B} = \mathbf{K}_0^{-1} \Delta \mathbf{K}$ . Ici aussi, une procédure d'orthonormalisation associée à une décomposition en valeurs singulières permet d'obtenir une base de rang maximum (en utilisant, là aussi, uniquement les plus grandes valeurs singulières suivant le critère défini à l'équation (5.13)).

### 5.2.3 Bilan sur l'état de l'art

La littérature sur les méthodes de réduction adaptées à la résolution de problèmes aux valeurs propres paramétrés est abondante. Nous avons décrit les méthodes qui nous semblent les plus utilisées dans la communauté « dynamique des structures ». Sur ces bases bibliographiques, il est délicat d'indiquer quelle méthode est la meilleure, chaque méthode ayant

---

4. On suppose  $\mathbf{K}_0$  régulière. Dans le cas contraire, par exemple en présence de modes de corps rigide, on peut soit utiliser une raideur « shiftée » en masse soit une technique de filtrage de modes rigides : on pourra, par exemple, consulter l'annexe B.2 de [150] pour plus de détails.

son propre domaine d'application. Néanmoins, à notre connaissance et en dehors de [37], ces méthodes ont rarement été appliquées pour réduire le système ERCE. Nous proposons, dans la suite, quelques pistes pour l'application de ces méthodes de réduction à l'ERCE.

## 5.3 Réanalyse adaptée à l'ERCE

### 5.3.1 Stratégie de réduction adaptée à l'ERCE

L'expansion par l'ERCE - que ce soit la version complète (équation (4.37)) ou la version avec erreur en raideur seulement (équation (4.39)) - peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad (5.25)$$

ce qui peut également s'écrire, sous forme de bloc, de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix}. \quad (5.26)$$

Pour réduire ce système de taille  $2N$ , on peut soit procéder à une réduction par bloc soit à une réduction complète.

- **la réduction par bloc** consiste à choisir une base  $\mathbf{T}$  réduisant efficacement le problème :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}^T \mathbf{A}_{11} \mathbf{T} & \mathbf{T}^T \mathbf{A}_{12} \mathbf{T} \\ \mathbf{T}^T \mathbf{A}_{21} \mathbf{T} & \mathbf{T}^T \mathbf{A}_{22} \mathbf{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}^T \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{T}^T \mathbf{b}_2 \end{bmatrix}; \quad (5.27)$$

- **la réduction par bloc (bases différentes)** consiste à choisir **deux** bases  $\mathbf{T}_1$  et  $\mathbf{T}_2$  réduisant efficacement le problème :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}_1^T \mathbf{A}_{11} \mathbf{T}_1 & \mathbf{T}_1^T \mathbf{A}_{12} \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{T}_2^T \mathbf{A}_{21} \mathbf{T}_1 & \mathbf{T}_2^T \mathbf{A}_{22} \mathbf{T}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1^T \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{T}_2^T \mathbf{b}_2 \end{bmatrix}; \quad (5.28)$$

- **la réduction complète** consiste à choisir une base  $\mathbf{T}$  réduisant efficacement le problème :

$$\mathbf{T}^T \mathbf{ATx} = \mathbf{T}^T \mathbf{b}. \quad (5.29)$$

Comme indiqué dans [37], il pourrait être judicieux d'utiliser des bases différentes pour la réduction par bloc. En effet, on rappelle que le vecteur solution  $\mathbf{x}$  est composé de deux types de vecteurs : le vecteur des résidus représentatifs des erreurs de modélisation - en masse et/ou raideur - noté  $\mathbf{r}_v$  et le vecteur étendu  $\boldsymbol{\phi}_v$ . Sur les cas pour lesquels les vecteurs essais sont simulés exactement, le vecteur résidu comporte seulement quelques termes localisées non nuls tandis que le vecteur étendu représente un mouvement global (en général, on étend

des modes globaux typiquement rencontrés dans le domaine des basses fréquences). Il paraît donc intéressant d'utiliser une base visant à opérer une réduction complète du système linéaire, cette base étant constituée de quelques réponses complètes obtenues sur un sous-espace de l'espace de conception. Soit  $\mathcal{X}_{\text{trial}}$  un sous-ensemble de l'espace de conception, la base multi-modèle globale s'écrit :

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{\text{trial}}^1 & \cdots & \mathbf{x}_{\text{trial}}^i & \cdots & \mathbf{x}_{\text{trial}}^s \end{bmatrix}, \quad (5.30)$$

avec  $\mathbf{x}_{\text{trial}}^i$  la réponse complète obtenue lorsque  $\mathbf{p}_i \in \mathcal{X}_{\text{trial}}$ . Comme la base multi-modèle utilisée pour la réduction par bloc, cette base va évidemment dépendre du nombre d'échantillon présent dans  $\mathcal{X}_{\text{trial}}$  : plus il y a d'échantillons, plus la base sera prédictive mais plus les temps de construction de la base seront conséquents.

### 5.3.2 Méthodes de réduction adaptées à l'ERCE : illustration

En guise d'illustration, nous étudions la performance des méthodes de réduction lorsqu'elles sont appliquées à la résolution du système ERCE sur un portique dont seul le mouvement dans le plan est considéré. Le modèle EF de portique est constitué de 1242 ddls actifs et est représenté sur la figure 5.1. Cette figure représente également la zone impactée de la modification - en vert - zone dans laquelle seulement le module d'Young varie et dont les valeurs sont données dans le tableau 5.1.

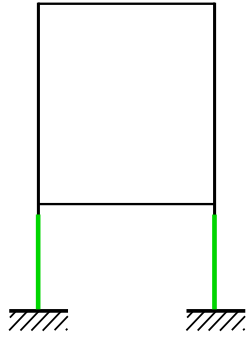


FIG. 5.1: Modèle EF du portique

Système « réel » + essais	Système modifié
$E^* = 1.10^{10} \text{ Pa}$	$E^0 = 1.10^9 \text{ Pa}$

TAB. 5.1: Paramètres variables

Le système considéré comme « réel » permet de simuler exactement (sans bruit) les essais. Le maillage expérimental est restreint à 20 ddls et est réparti de manière uniforme sur le portique. La figure 5.2 présente les déformées numériques du système réel et du système modifié : les modification importantes (module d'Young divisé par 10) apportées au niveau du module d'Young entraînent l'apparition de modes localisés.

L'objectif de cette illustration est de prédire les dix premiers modes étendus (essais sur le système modifié) lorsque le module d'Young  $p = E$  du système modifié évolue dans  $\Omega =$

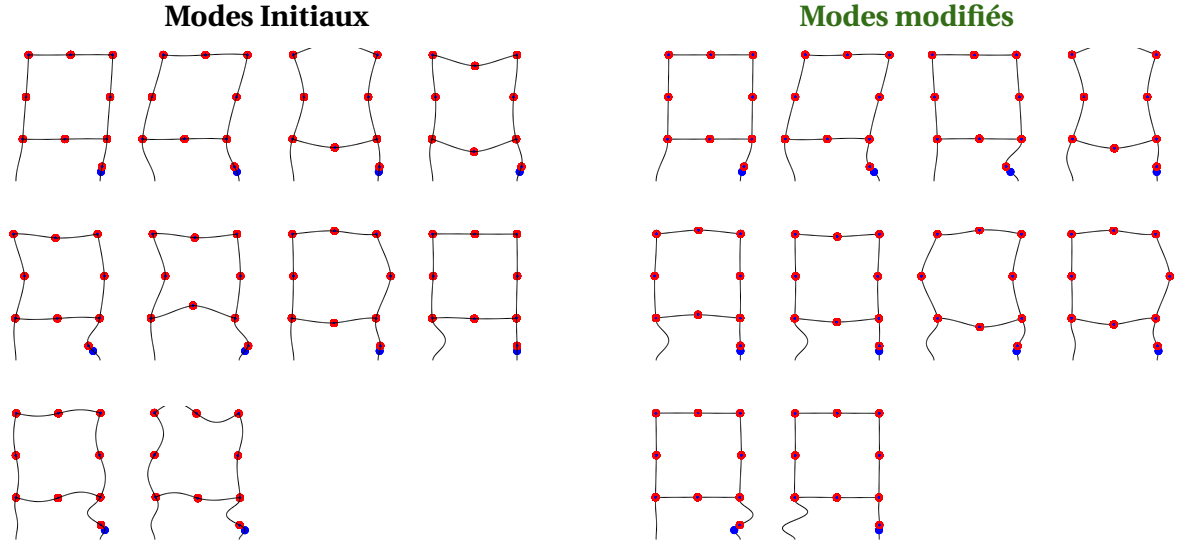


FIG. 5.2: Déformées calculées avec le modèle réel et le modèle modifié

$\left[ \frac{p^0}{10} = \frac{E^0}{10}; p^0 \times 10 = E^0 \times 10 = E^* \right]$ . On utilise les sept bases précisées ci-dessous pour prédire ces modes étendus :

- réduction par bloc sur une base de Ritz constituée des modes normaux et des vecteurs sensibilités (équation (5.12)) calculés au voisinage de  $p = p^0$  : **méthode MNS** pour la suite ;
- réduction par bloc avec des bases différentes (équation (5.28)) sur une base de Ritz constituée des modes normaux (base  $T_1$ ) et des vecteurs sensibilités (base  $T_2$ ) calculés au voisinage de  $p = p^0$  : **méthode MNSD** pour la suite ;
- réduction par bloc sur une base de Ritz dite « multi-modèle » (équation (5.14)) dans laquelle 4 échantillons répartis de manière uniforme dans  $\Omega$  ont été calculés : **méthode MM** pour la suite ;
- réduction par bloc sur une base de Ritz constituée des modes normaux et des corrections statiques (équation (5.18)) calculés au voisinage de  $p = p^0$  : **méthode STA** pour la suite ;
- réduction par bloc sur une base de Kirsch d'ordre 2 adaptée à la résolution de problème aux valeurs propres en partant de  $p = p^0$  (équation (5.20)) : **méthode KBI** pour la suite ;
- réduction globale sur une base de Kirsch d'ordre 4 adaptée à la résolution de problème de statique (équation (5.24)) : **méthode KGI** pour la suite ;
- réduction globale sur une base constituée de 11 vecteurs solutions calculées de manière uniforme dans  $\Omega$  (équation (5.30)) : **méthode MMg** pour la suite.

L'évaluation de la performance des méthodes de réduction est réalisée sur la base de quatre indicateurs<sup>5</sup>. Soient

- $m$  le nombre de modes étendus ;
- $x_v^*(p) = [\mathbf{r}_v^*(p); \hat{\boldsymbol{\phi}}_v^*(p)]$  le vecteur solution exact du système ERCE relatif au mode  $v$  et à la configuration  $p$  ;
- $x_v^a(\mathbf{T}, p) = [\mathbf{r}_v^a(\mathbf{T}, p); \hat{\boldsymbol{\phi}}_v^a(\mathbf{T}, p)]$  le vecteur solution approché du système ERCE obtenu par projection sur  $\mathbf{T}$  relatif au mode  $v$  et à la configuration  $p$ .

Pour chaque paramètre  $p \in \Omega$ , on calcule également les dix modes étendus exacts permettant ainsi de calculer les indicateurs (équation (5.31) à (5.34) ci-dessous) et tirer d'éventuelles conclusions sur la pertinence des bases. Les quatre indicateurs sont

- un moins le MAC moyen sur tous les modes

$$\bar{m}(\mathbf{T}, p) = 1 - \frac{1}{m} \sum_{v=1}^m \text{MAC}(\hat{\boldsymbol{\phi}}_v^*(p), \hat{\boldsymbol{\phi}}_v^a(\mathbf{T}, p)), \quad (5.31)$$

- un moins le pire MAC

$$m_{\max}(\mathbf{T}, p) = 1 - \min_{v \in \{1, \dots, m\}} \{\text{MAC}(\hat{\boldsymbol{\phi}}_v^*(p), \hat{\boldsymbol{\phi}}_v^a(\mathbf{T}, p))\}, \quad (5.32)$$

- l'erreur relative moyenne en norme 2 du vecteur étendu

$$\epsilon_1(\mathbf{T}, p) = \frac{1}{m} \sum_{v=1}^m \frac{\|\hat{\boldsymbol{\phi}}_v^*(p) - \hat{\boldsymbol{\phi}}_v^a(\mathbf{T}, p)\|_2}{\|\hat{\boldsymbol{\phi}}_v^*(p)\|_2}, \quad (5.33)$$

- l'erreur relative moyenne en norme 2 du résidu

$$\epsilon_2(\mathbf{T}, p) = \frac{1}{m} \sum_{v=1}^m \frac{\|\mathbf{r}_v^*(p) - \mathbf{r}_v^a(\mathbf{T}, p)\|_2}{\|\mathbf{r}_v^*(p)\|_2}. \quad (5.34)$$

La figure 5.3 permet d'évaluer la performance des méthodes de réduction lorsqu'elles sont appliquées au système ERCE. Cette figure représente l'évolution des indicateurs en fonction de  $\delta p = \frac{p}{p_0}$ .

Pour tous les indicateurs, plus ils sont proches de 0, plus les bases sont prédictives. On notera que l'opérateur MAC est pondéré par la matrice de masse  $\mathbf{M}_0$  qui reste la même  $\forall p \in \Omega$  puisqu'aucune modification en masse n'est apportée au système. L'indicateur  $\bar{m}$  permet d'évaluer, en moyenne, la pertinence des bases tandis l'indicateur  $m_{\max}$  permet d'évaluer si pour au moins un mode la prédiction n'est pas bonne. Les indicateurs  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  sont connus pour être plus sensible que le MAC. Pour toutes les bases,  $\epsilon_2 \rightarrow +\infty$  lorsque  $p \rightarrow E^*$ , ce qui est logique car pour cette valeur particulière du paramètre  $p$ , le modèle EF est exactement celui

5. Notons que, au préalable, pour chaque vecteur étendu, une normalisation de Gram-Schmidt par rapport à  $\mathbf{M}_0$  est opérée.

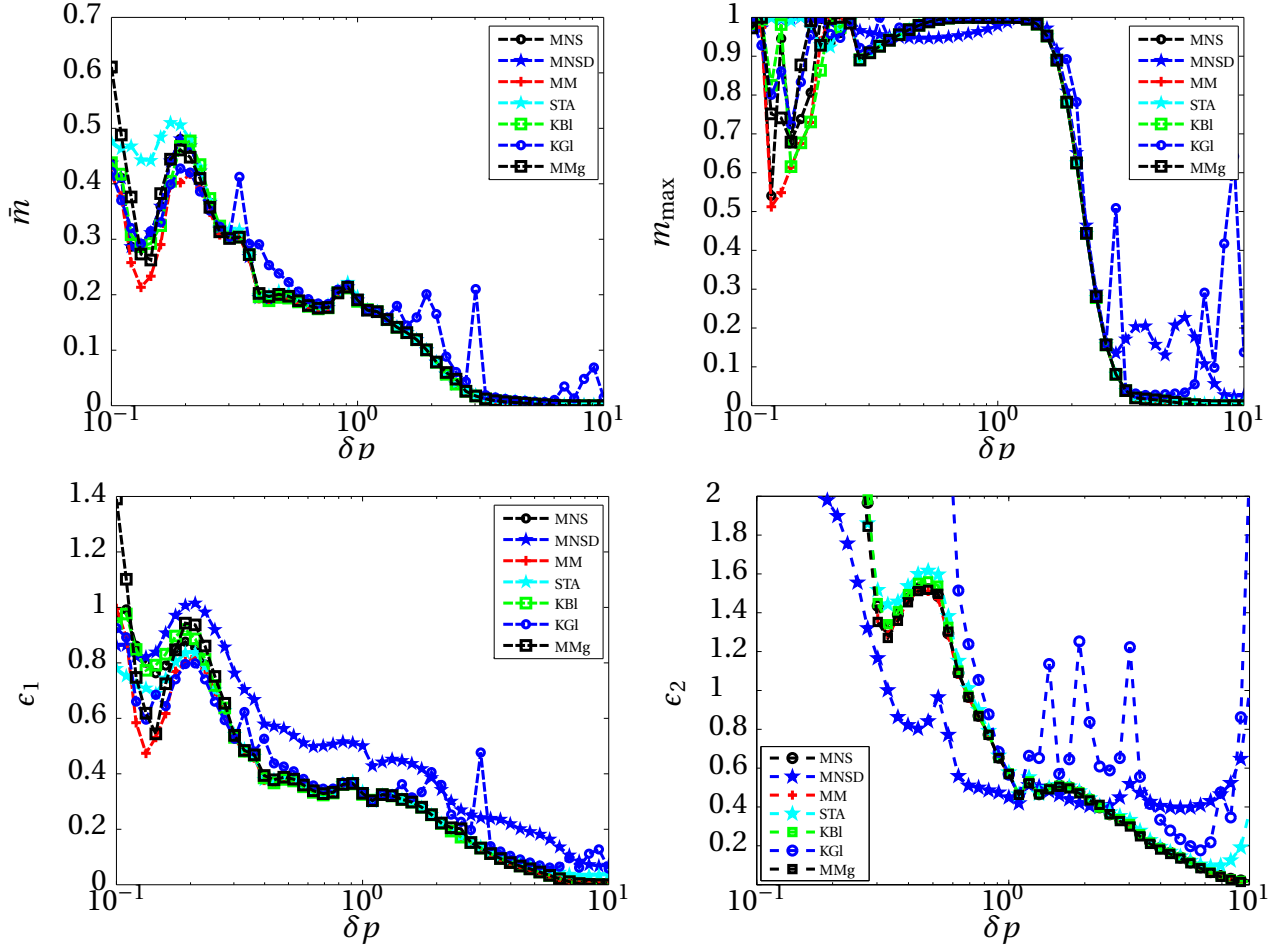


FIG. 5.3: Performance des méthodes de réduction appliquées à l'ERCE

qui a permis de simuler et donc le résidu  $\mathbf{r}_v^*$  tend vers 0 (pour tous les modes  $v$ ).

La figure 5.3 nous indique également que la capacité de prédiction des bases est proche suivant le type de vecteur que l'on utilise dans la base. D'autre part, toutes les bases tendent à être plus prédictives lorsque le comportement dynamique du modèle EF devient de plus en plus proche de celui correspondant aux essais. En effet, lorsque  $\delta p$  est proche de  $10^{-1}$ , le modèle EF exhibe de nombre modes locaux (ce qui n'est pas le cas des vecteurs propres expérimentaux) : les bases calculées au voisinage de  $p^0$  - comme MNS, MNSD, STA - ne sont pas performantes puisqu'elles ne contiennent pas de modes locaux identifiés lorsque  $\delta p = 10^{-1}$ . Contrairement aux méthodes MM et MMg où on voit clairement apparaître le point de conception utilisé (à  $\delta p \approx 0.5$ ) pour construire la base. Par contre, à partir de  $\delta p = 1$  et jusqu'à  $\delta p = 10$ , les vecteurs propres du modèle EF sont proches, en terme de forme, des vecteurs propres expérimentaux : les bases améliorent leurs capacité de prédiction. Fina-



lement, ce cas-test ne permet pas de conclure clairement sur la meilleure méthode de réduction pour traiter des problèmes paramétriques avec l'ERCE. Néanmoins, les méthodes du type multi-modèle - MM et MMg - semblent se dégager légèrement des autres méthodes. Enfin, il est important d'indiquer que toutes les bases ont été utilisées de manière optimale (de rang plein et avec un nombre de vecteurs minimums).

### 5.3.3 Bilan

Les temps de calculs associés à l'obtention de vecteurs étendus par l'erreur en relation de comportement sont très importants et limitent leurs utilisations dans des procédures itératives (du type analyse de robustesse). La résolution du système ERCE dans un sous-espace réduit est l'approche privilégiée dans ce mémoire. Plusieurs bases, issues de la bibliographie, ont été utilisées et la performance de la réduction a été illustrée sur un système académique. Cet exemple n'a néanmoins pas permis de faire ressortir clairement une méthode : l'utilisation de ces bases sur des systèmes industriels apporterait sous doute plus d'enseignements que ceux établis précédemment.

## 5.4 Application industrielle

L'expansion robuste a pour objectif d'obtenir des vecteurs étendus les plus robuste possible vis-à-vis des paramètres incertains du modèle EF et répond à un objectif de la thèse visant à construire un modèle hybride robuste. Comme nous l'avons indiqué dans le chapitre 4, la procédure d'expansion robuste est un cas particulier de la calibration robuste. L'objectif de la calibration robuste est, cette fois, d'obtenir un modèle EF dont les prédictions des réponses - comme des solutions propres - seront robustes vis-à-vis des méconnaissances [114, 144]. Dans la suite, nous proposons de calibrer une structure de complexité industrielle vis-à-vis de données d'essais dans une démarche robuste.

### 5.4.1 Description du système et objectifs

Le système étudié est un stator de moteur électrique dont le modèle numérique ainsi que les résultats d'identification modale nous ont été fournis par Vibratec [92]. Pour ces systèmes, comme pour les alternateurs de centrales, seuls quelques modes globaux de cylindre gouvernent le comportement dynamique et sont donc d'un intérêt critique. Notamment, les modes de cylindre n'entraînant pas de mouvement dans la longueur du stator (modes à lobes purs c'est à dire sans couplage avec un mode de flexion dans le sens de la longueur) participent fortement au comportement dynamique et doivent donc pouvoir être prédits de manière satisfaisante. Le stator est constitué d'un assemblage de tôles feuilletées qui sont

ensuite solidarisées par des cordons de soudure dans le sens de la longueur.

Nous avons donc à disposition un modèle EF - représenté sur la figure 5.4 - et constitué de 24 768 nœuds formant un ensemble de 148 608 ddls. Ce modèle EF est constitué de quatre zones, chaque zone ayant ses propres propriétés matériaux reportées dans le tableau 5.2. Les cordons de soudure sont modélisés par un matériau isotrope. L'assemblage des tôles comporte un aspect composite dont le comportement est isotrope transverse mais délicat à modéliser. Un calcul d'homogénéisation [91] a donc permis de renseigner les données caractéristiques d'un matériau isotrope transverse : ce sont celles correspondant au matériau « prox ». Les deux autres zones, intitulé culasse et dent, dérivent directement des propriétés matériaux de la zone prox : la seule différence se situe au niveau des modules transverses (cf. tableau 5.2) où un facteur  $3/4$  (resp.  $1/2$ ) est appliqué sur les modules transverses du prox pour obtenir les modules transverses de la culasse (resp. des dents). Ces facteurs, en plus du retour d'expérience, sont justifiés pour prendre en compte la distance aux cordons de soudures entraînant une baisse de la rigidité transverse.

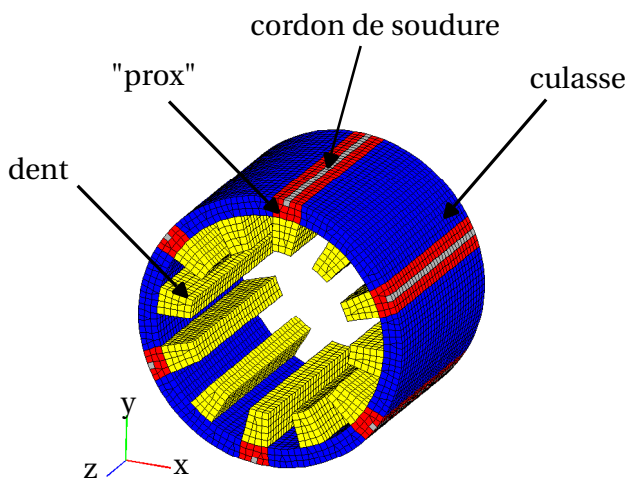


FIG. 5.4: Modèle EF du stator

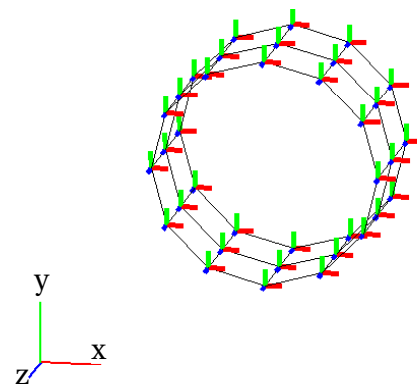


FIG. 5.5: Maillage expérimental

Des analyses modales expérimentales ont également été réalisées permettant d'identifier les solutions propres de la structure étudiée : 36 capteurs mesurant le déplacement dans les trois directions ont été utilisés (cf. figure 5.5). Ces essais modaux ont permis d'identifier des modes typiques de structures cylindrique à savoir des modes à lobes (de 2 à 5 sur la figure 5.6) ainsi qu'un mode d'ovalisation. La figure 5.6 présente la corrélation entre les solutions propres identifiées et les solutions propres calculées avec le modèle numérique après appa-

Nom	$E_x$ (GPa)	$E_y$ (GPa)	$E_z$ (GPa)	$G_{xy}$ (GPa)	$G_{xz}$ (GPa)	$G_{zx}$ (GPa)	$\nu_{xy}$ (SI)	$\nu_{xz}$ (SI)	$\nu_{zx}$ (SI)	$\rho$ (kg.m <sup>-3</sup> )
Soudure	207			-			0.288			7750
Prox	205	205	157	<b>51.2</b>	<b>51.2</b>	<b>82.1</b>	0.25	0.25	0.25	7750
Culasse	205	205	157	<b>38.4</b>	<b>38.4</b>	<b>61.6</b>	0.25	0.25	0.25	7750
Dent	205	205	157	<b>25.6</b>	<b>25.6</b>	<b>41.1</b>	0.25	0.25	0.25	7750

TAB. 5.2: Paramètres matériaux du stator de moteur électrique

riage (les vecteurs propres en rouge sont restreints à la projection des vecteurs propres du modèle numérique sur le maillage expérimental). La figure 5.7 présente l'erreur relative en fréquence pour chaque paire de modes considérés. Les figures 5.6 et 5.7 nous indiquent que

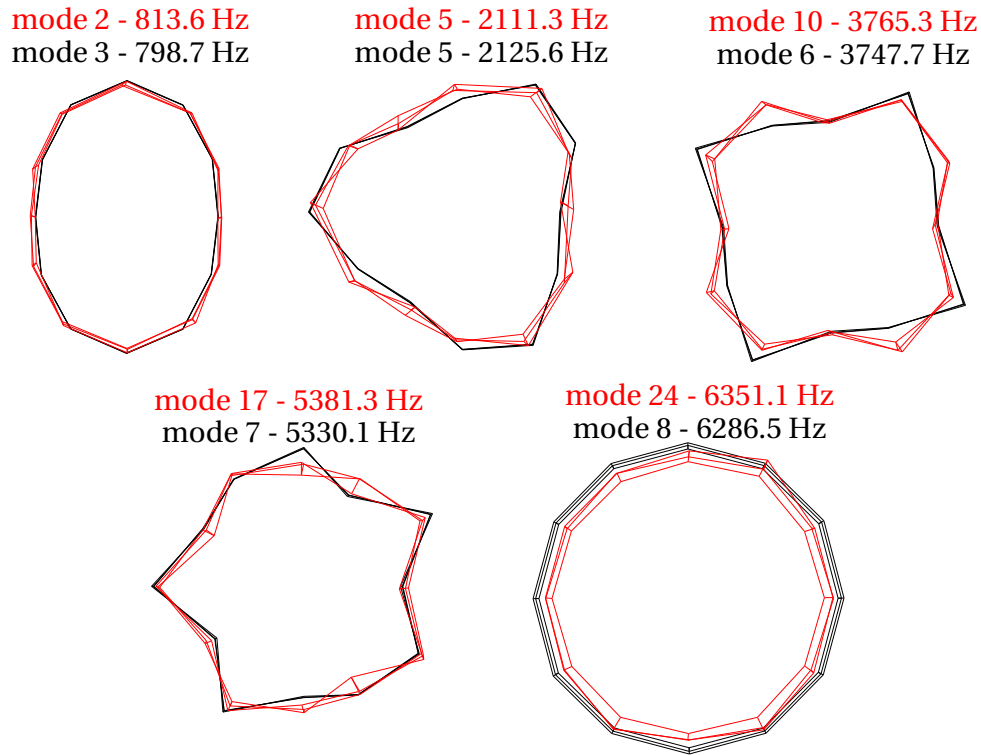


FIG. 5.6: Comparaison des vecteurs propres identifiés et calculés après appariage (rouge = numérique et noir = expérimental)

le modèle, sans calibration, est capable de prédire les cinq premières solutions propres avec une précision acceptable. Néanmoins, les prédictions du modèle dépendent des modules transverses des zones prox, culasse et dent, comme illustré sur la figure 5.8 qui représente l'évolution de l'erreur en fréquence moyenne sur les cinq modes lorsque  $\mathbf{p}$  évolue.

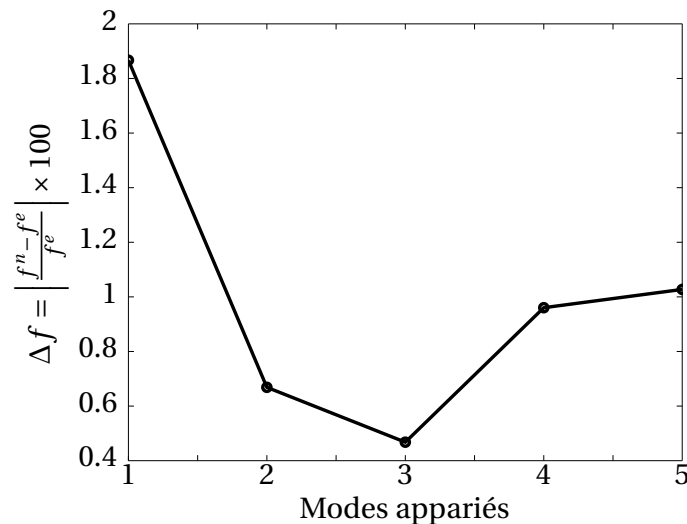


FIG. 5.7: Erreur relative en fréquence pour les paires de modes appariés

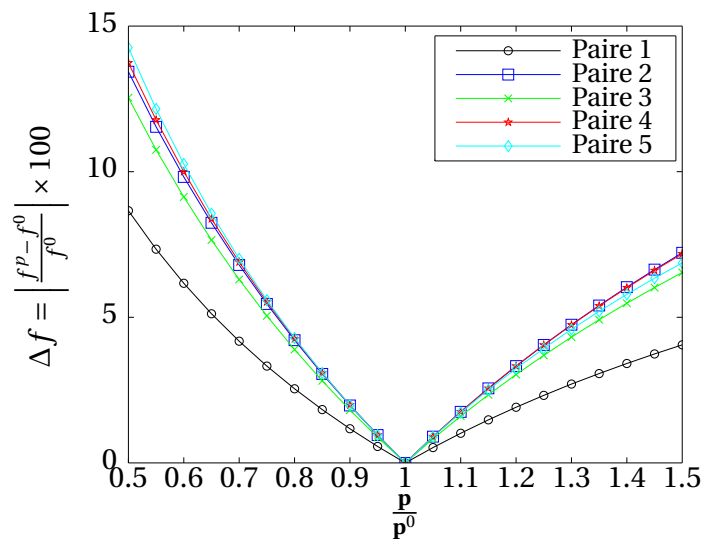


FIG. 5.8: Erreur relative en fréquence par rapport au modèle initial

Les modules transverses de la zone prox découlent d'un calcul d'homogénéisation pouvant contenir des erreurs. Les facteurs 3/4 et 1/2 - bien qu'issus du retour d'expérience - ne sont également pas justifié par le calcul et peuvent, de fait, être considéré comme incertains.

L'objectif de cette application est donc d'évaluer la robustesse des prédictions du modèle vis-à-vis des méconnaissances affectant les modules transverses des zones culasse et dent. On souhaite également être en mesure de proposer un modèle dont les prédictions seront robustes vis-à-vis de ces méconnaissances. La calibration robuste [24, 114, 144] permet de

répondre à ces objectifs.

Se basant sur le cadre fournit par la théorie info-gap [22], trois éléments sont nécessaires pour résoudre un problème de calibration robuste :

- **le modèle du système** établit la relation entre les paramètres incertains et l'erreur de prédiction. Comme pour l'expansion robuste, on distingue les paramètres de calibration - ou de décision - regroupés dans le vecteur  $\mathbf{q}$  des paramètres incertains regroupés dans le vecteur  $\mathbf{x}$ . Ces paramètres constituent un sous-ensemble des paramètres du modèle EF. La qualité du modèle EF est évaluée par l'erreur relative absolue moyenne en fréquence après appariage : soient  $\omega_v^n$  et  $\omega_v^t$  respectivement la fréquence propre calculée et appariée correspondant au mode  $v$  du modèle numérique et celle identifiée, l'erreur est donnée par

$$\epsilon = \frac{1}{m} \sum_{v=1}^m \frac{|\omega_v^n - \omega_v^t|}{\omega_v^t}. \quad (5.35)$$

On qualifiera également  $\epsilon$  d'erreur de prédiction.

- **le modèle de prise de décision** indique que l'erreur de prédiction ne doit pas dépasser une certaine valeur critique, notée  $\epsilon^c$ . Au delà de cette valeur, le modèle EF n'est plus considéré comme prédictif. Dans ce cas, le modèle de prise de décision implique que le modèle EF doit vérifier

$$\epsilon \leq \epsilon^c. \quad (5.36)$$

- **le modèle d'incertitude** décrit l'espace de variation des paramètres incertains du modèle EF sous la forme de sous-ensembles convexes et imbriqués. Ainsi, le paramètre incertain est contraint à appartenir au modèle d'incertitude  $\mathcal{U}(\alpha, \mathbf{x}^0)$  :

$$\mathbf{x} \in \mathcal{U}(\alpha, \mathbf{x}^0), \quad (5.37)$$

avec  $\alpha$  l'horizon d'incertitude qui est inconnu et  $\mathbf{x}^0$  l'estimation initiale des paramètres incertains. Pour les cas étudiés, on utilisera un métamodèle construit - et donc valable - sur la restriction d'un espace de conception que l'on se fixe *a priori* afin de calculer les courbes de robustesse. Le modèle d'incertitude doit donc prendre en compte cette restriction. Pour les paramètres  $\mathbf{x}$  dont on souhaite limiter la variation à l'intervalle  $[\mathbf{x}_{\min}, \mathbf{x}_{\max}]$ , on peut utiliser le modèle d'incertitude suivant [116]

$$\mathcal{U}(\alpha, \mathbf{x}^0) = \{\mathbf{x} : (1 - \mathbf{w}\alpha) \mathbf{x}^0 + \mathbf{w}\alpha \mathbf{x}_{\min} \leq \mathbf{x} \leq (1 - \mathbf{w}\alpha) \mathbf{x}^0 + \mathbf{w}\alpha \mathbf{x}_{\max}\}, \quad (5.38)$$

avec  $\mathbf{w}$  un poids de pondération permettant d'affecter une valeur d'incertitude différente aux paramètres.

## 5. Vers une application industrielle

Paramètres	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$p_4$	$p_5$	$p_6$	$p_7$	$p_8$	$p_9$
Noms	$G_{zx}$	$G_{xy}$	$G_{xz}$	$G_{zx}$	$G_{xy}$	$G_{xz}$	$G_{zx}$	$G_{xy}$	$G_{xz}$
Valeurs (en GPa)	41.1	25.6	25.6	82.1	51.2	51.2	61.6	38.4	38.4
Zone		dent			prox			culasse	

TAB. 5.3: Paramétrisation du stator

Ces éléments nous permettent de définir la fonction robustesse qui exprime le plus grand horizon d'incertitude pour lequel aucune défaillance - au sens du modèle de prise de décision (équation (5.36)) - ne peut avoir lieu et s'écrit, ici

$$\hat{\alpha}(\mathbf{q}, \epsilon^c) = \max \left\{ \alpha : \left( \max_{\mathbf{x} \in \mathcal{U}(\alpha, \mathbf{x}^0)} \epsilon \right) \leq \epsilon^c \right\} \in \mathbb{R}_+. \quad (5.39)$$

La fonction robustesse permet d'évaluer la capacité des paramètres de décision à fournir une erreur de prédiction des fréquences résistante vis-à-vis des paramètres incertains. Pour améliorer la robustesse d'un modèle donné, on le calibre dans une démarche robuste. Les paramètres robustes sont obtenus après résolution du problème d'optimisation suivant :

$$\mathbf{q}^R(\epsilon^c) = \arg \max_{\mathbf{q}} \{ \hat{\alpha}(\mathbf{q}, \epsilon^c) \}. \quad (5.40)$$

Les paramètres robustes dépendent directement du niveau d'exigence  $\epsilon^c$  que l'on apporte au modèle de prise de décision (équation (5.36)) : plus on va demander une erreur de prédiction faible, moins le modèle pourra être robuste.

### 5.4.2 Calculs préliminaires : analyse de sensibilité

La résolution d'un problème de calibration robuste exige un nombre important d'évaluation du modèle EF. Ici, nous nous intéressons à neuf paramètres dont les variations peuvent provoquer des variations dans les erreurs de prédiction (cf. figure 5.8) : ces paramètres sont regroupés dans le vecteur  $\mathbf{p}$  :

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 & p_7 & p_8 & p_9 \end{bmatrix}, \quad (5.41)$$

les valeurs des  $p_i$  étant regroupées dans le tableau 5.3. Nous souhaitons, dans cette section, obtenir une hiérarchisation des neuf paramètres en fonction de leurs influences sur les erreurs de prédiction. La méthode de Morris [99] fait partie des méthodes d'analyse de sensibilité qualitative globale : les paramètres sont explorés sur leurs espaces de variation potentielle, cependant, on ne peut avoir qu'une idée de l'importance des paramètres les uns par rapport aux autres. La méthode de Morris est une approche OAT - *One Factor At Time*

- de type *screening* dont le principe est disponible en annexe C et permettant de classer les paramètres (ou facteurs) en trois groupes selon que leurs effets soient :

1. négligeables ;
2. linéaires et sans interactions avec d'autres facteurs ;
3. non-linéaires ou avec interactions.

Les neuf paramètres regroupés dans le vecteur  $\mathbf{p}$  sont considérés dans cette analyse de Morris et dans laquelle  $n_l = 10$  niveaux et  $r = 100$  trajectoires ont été considérés, ce qui a nécessité 1000 évaluations du modèle EF. La réponse d'intérêt est la moyenne des erreurs relatives absolues entre les fréquences des modes expérimentaux et les fréquences des modes numériques appariés (équation (5.35)).

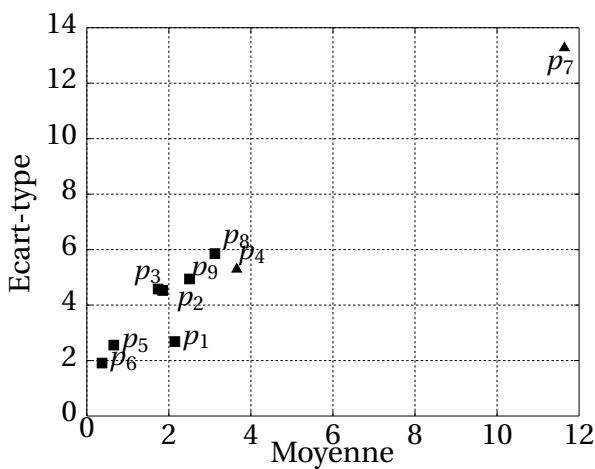


FIG. 5.9: Moyenne vs écart-type

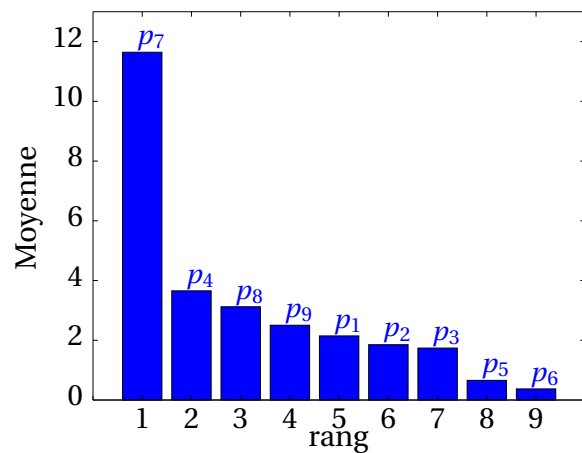


FIG. 5.10: Classement des paramètres

La figure 5.9 représente l'effet des paramètres sur la réponse d'intérêt selon les indices définis en annexe C. Cette figure nous indique que des variations sur le paramètre  $p_7$  semble avoir un effet non-linéaire ou avec interactions sur la réponse d'intérêt. Les autres paramètres semblent influencer de manière quasi-équivalente la réponse d'intérêt, ce qui est confirmé sur la figure 5.10 qui classe les paramètres selon la moyenne des effets élémentaires.

Concernant le cas traité à la section 5.4.3, nous garderons les deux paramètres les plus influents obtenus suite à cette analyse de sensibilité à savoir les paramètres  $p_4$  et  $p_7$ . Pour le cas traité à la section 5.4.4, on gardera l'ensemble des neuf paramètres, l'analyse de sensibilité n'ayant pas permis de discriminer fortement certaines variables.

### 5.4.3 Cas 1 : restriction à deux paramètres pour une prédiction robuste

Dans un premier temps et dans un souci de clarté, on restreint donc l'étude à deux paramètres :  $p_4$  et  $p_7$ . D'autre part, toujours à titre d'illustration, on se concentre sur la pré-

diction de la fréquence du premier mode expérimental en 2 lobes identifiée à 798.7 Hz (cf. figure 5.6). On rappelle que le paramètre  $p_4$  est déterminé par un calcul d'homogénéisation contrairement au paramètre  $p_7$  qui vérifie  $p_7 = \frac{3}{4}p_4$ . Dans cette section, on considère que :

- le paramètre incertain est  $p_7$  donc  $x = p_7/p_7^0$  avec  $p_7^0$  la valeur initiale du paramètre  $p_7$  exprimée sur le tableau 5.3 ;
- le paramètre de décision est  $p_4$  donc  $q = p_4/p_4^0$  avec  $p_4^0$  la valeur initiale du paramètre  $p_4$  exprimée sur le tableau 5.3.

Chaque variation des paramètres - incertain et de décision - entraîne la résolution d'un nouveau problème aux valeurs propres, ce qui peut conduire à des temps de calcul conséquents lorsque l'on cherche à construire des courbes de robustesse. Lorsque le modèle EF est utilisé pour prédire des fréquences propres - ce qui est le cas ici - il peut être intéressant d'utiliser un métamodèle. En effet, les fréquences propres résultant d'un critère quadratique sont des quantités physiques susceptibles de pouvoir être prédites par un métamodèle. Enfin, la paramétrisation du modèle permettant de modifier globalement le comportement dynamique est un autre argument en faveur de la construction de métamodèle.

Il existe au moins trois approches pour la construction de métamodèles [61, 116] : les surfaces de réponses, le krigeage et les réseaux de neurones. Une comparaison des performances de ces trois méthodes a été réalisée dans [116] : il en est ressorti que le krigeage et les réseaux de neurones étaient de bons outils pour la prédiction de réponses fortement non-linéaires. Cependant, pour la prédiction de réponse faiblement non-linéaire, l'approche par surface de réponse donne des résultats similaires pour un temps de construction moindre. Suivant la régularité de la réponse, il peut être plus intéressant d'envisager, en priorité, la construction du métamodèle par une approche par surface de réponse [102], ce que nous faisons dans la suite.

Nous utilisons un plan d'expériences complet à 5 niveaux comme base d'apprentissage pour construire le métamodèle : avec 2 paramètres,  $n = 25$  évaluations du modèle EF sont donc nécessaires. Un polynôme de degré 4 est utilisé, ce qui nécessite l'identification de  $d = 15$  coefficients en autorisant le couplage. Les coefficients du polynôme  $\beta \in \mathbb{R}^d$  vérifient alors

$$\mathbf{X}\beta = \hat{\mathbf{y}}, \quad (5.42)$$

avec  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n,d}$  la matrice des entrées (ou des effets) et  $\hat{\mathbf{y}}$  la réponse prédite par le polynôme. Connaissant la réponse exacte  $\mathbf{y}$ , l'estimateur des moindres carrés ordinaires  $\hat{\beta}$  de  $\beta$  est obtenu par

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}. \quad (5.43)$$



Cependant, cette formulation ne prend pas en compte le fait que  $\mathbf{X}$  peut être soit mal conditionnée soit de rang non plein créant de fait des instabilité sur l'obtention des coefficients  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ . Pour y remédier, les coefficients optimaux des polynômes sont obtenus différemment. Une décomposition en valeur singulière est réalisée sur  $\mathbf{X}$

$$\mathbf{X} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^T, \quad (5.44)$$

avec  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{V}$  deux matrices unitaires et  $\boldsymbol{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_d)$  la matrice diagonale regroupant les valeurs singulières. Des valeurs singulières nulles indiquent que  $\mathbf{X}$  n'est pas de rang plein tandis que le conditionnement de  $\mathbf{X}$  est directement lié au rapport entre la plus grande et la plus petite valeur singulière. On ne retient, ensuite, que les principales valeurs singulières supérieures à la valeur singulière critique  $\sigma_c$  définie par le critère

$$\sigma_c = 10^{-3} \sum_{i=1}^d \frac{\sigma_i}{d}. \quad (5.45)$$

Les coefficients  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$  sont alors obtenus par

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^T)^{-1} = \mathbf{V}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{U}^T \mathbf{y}. \quad (5.46)$$

La figure 5.11 présente la surface de la réponse générée avec le polynôme de degré 4 ainsi que les points utilisés comme base d'apprentissage (calculs exacts). Par ailleurs, la figure 5.11 montre également - *a posteriori* - que la réponse est très régulière et devrait donc pouvoir être prédite correctement par un modèle polynomial. La qualité du métamodèle est évaluée par une erreur MSE (*Mean Squared Error*) donnée en % par

$$\text{MSE}(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{y}}) = \frac{100}{n\sigma_y^2} \sum_{i=1}^n (y^i - \hat{y}^i)^2, \quad (5.47)$$

avec  $\mathbf{y}$  la réponse prédite par calculs exacts de variance  $\sigma_y^2$  et  $\hat{\mathbf{y}}$  les points obtenus par le métamodèle. Pour le métamodèle, on obtient une erreur MSE de  $4.10^{-7}\%$ , ce qui est faible. Ce métamodèle va nous permettre d'obtenir très rapidement les courbes de robustesse, l'évaluation d'un point de l'espace de conception par un modèle polynomial étant immédiate. On note, toutefois, que l'on pourra calculer les courbes de robustesse uniquement dans l'espace de conception que l'on a fixé *a priori* pour la construction du métamodèle, à savoir :

$$q \in [0.1; 1.9] \quad \text{et} \quad x \in [x_{\min} = 0.1; x_{\max} = 1.9]. \quad (5.48)$$

On autorise donc 90% de variation - ce qui est conséquent - sur les modules transverses  $p_4$  et  $p_7$  : si cette variation n'est pas suffisante, on devra toutefois recalculer un nouveau métamodèle.

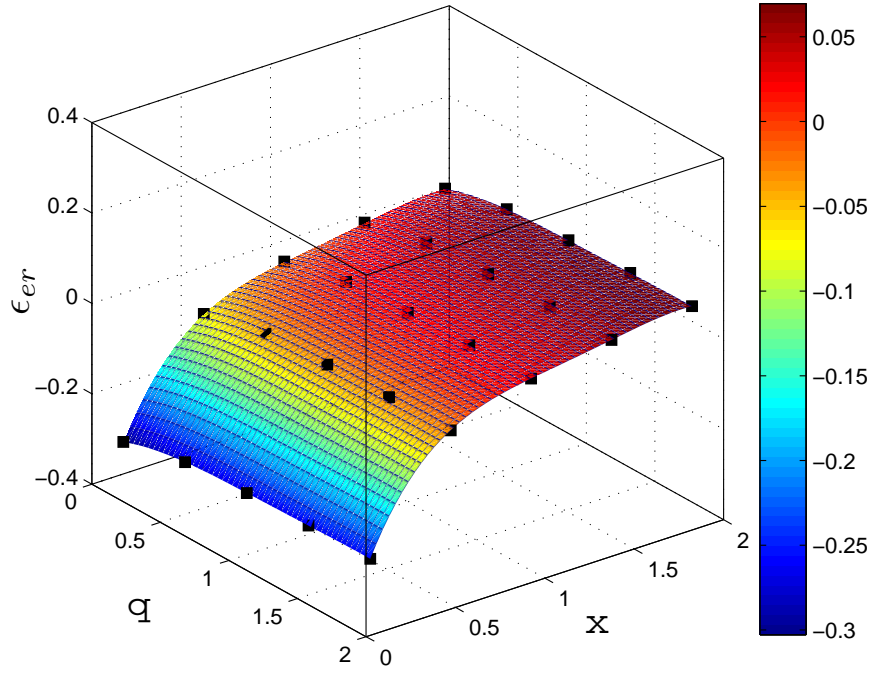


FIG. 5.11: Surface de réponse obtenue par un modèle polynomial de degré 4 et points de conception utilisés comme base d'apprentissage ( $MSE = 4.10^{-7} \%$ )

Dans un premier temps, on cherche à évaluer l'impact des méconnaissances affectant  $x$  sur l'erreur de prédiction (équation (5.35)), le paramètre de décision étant fixé à sa valeur initiale. Pour obtenir les courbes de robustesse, on s'appuie sur la démarche pratique décrite à l'annexe A : on souhaite obtenir la fonction robustesse sur l'intervalle  $\mathcal{J} = [0; 1]$ . On discrétise l'intervalle  $\mathcal{J}$  par pas de  $\Delta\hat{\alpha} = 0.0101$  avec  $\hat{\alpha}_{i+1} = \hat{\alpha}_i + \Delta\hat{\alpha}$  et  $\hat{\alpha}_0 = 0$ . Pour chaque  $\hat{\alpha}_i \in \mathcal{J}$ , on résout le problème d'optimisation sous contrainte suivant

$$\epsilon^c = \max_{x \in \mathcal{U}(\hat{\alpha}_i, x^0)} \epsilon = \max_{x \in \mathcal{U}(\hat{\alpha}_i, x^0)} \frac{|\omega_v^n - \omega_v^t|}{\omega_v^t}. \quad (5.49)$$

Nous avons utilisé deux approches classiques pour résoudre le problème d'optimisation (5.49) :

- la méthode intitulée « minmax » retient le maximum de la fonction coût lorsque les paramètres incertains sont évalués aux bornes. Soit  $\hat{\alpha}_i \in \mathcal{J}$ , alors

$$\epsilon^c = \max\{\epsilon_-^c; \epsilon_+^c\}, \quad (5.50)$$

avec  $\epsilon_-^c$  (resp.  $\epsilon_+^c$ ) la valeur de la fonction coût lorsque  $x = (1 - \hat{\alpha}_i) x^0 + \hat{\alpha}_i x_{\min}$  (resp.  $x = (1 - \hat{\alpha}_i) x^0 + \hat{\alpha}_i x_{\max}$ ).

- la méthode intitulée « *fmincon* » permet d’obtenir le maximum de la fonction coût en utilisant la fonction de recherche d’optimums locaux *fmincon* de Matlab®. Cet algorithme<sup>6</sup> traitant exclusivement des problèmes de minimisation sous contrainte, le problème (5.49) adapté pour la minimisation est

$$\epsilon^c = \min_{x \in \mathcal{U}(\hat{\alpha}_i, x^0)} \{-\epsilon\} \quad \text{avec} \quad \hat{\alpha}_i \in \mathcal{I}. \quad (5.51)$$

La figure 5.12 présente finalement les deux courbes de robustesse obtenues suivant la méthode « minmax » et « *fmincon* ». Partant du point initial (représenté par ♦ sur les figures 5.12 à 5.15), la figure 5.12 permet d’évaluer l’impact des méconnaissances affectant  $x$  sur l’erreur de prédiction  $\epsilon$  au fur et à mesure que l’horizon d’incertitude augmente. D’autre part, la figure 5.13 représente l’évolution des paramètres incertains qui maximise la fonction coût (5.49) en fonction de l’horizon d’incertitude :  $x_m^w$  (resp.  $x_f^w$ ) est le paramètre incertain qui maximise la fonction coût (5.49) suivant la méthode minmax (resp. *fmincon*). Suivant la

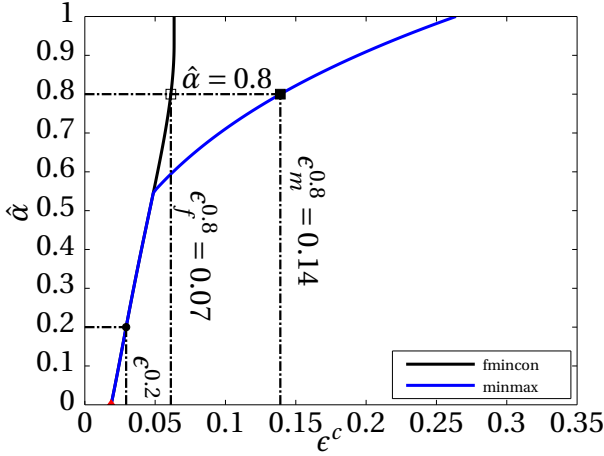
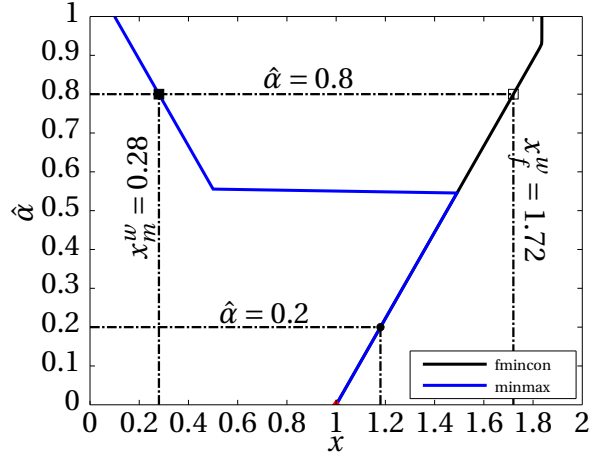


FIG. 5.12: Courbes de robustesse

FIG. 5.13: Pire cas pour  $x$ 

méthode de résolution du problème (5.49), les figures 5.12 et 5.13 présentent des différences. Notamment, parmi les deux courbes de robustesse représentées sur la figure 5.12, quelle est celle qui est la « vraie » robustesse ? Pour y répondre, examinons les figures 5.14 et 5.15 fournissant l’erreur de prédiction en fonction de  $x$  lorsque respectivement  $\hat{\alpha} = 0.2$  (représenté par • sur les figures 5.12 à 5.15) et  $\hat{\alpha} = 0.8$  (représenté par □, pour la résolution *fmincon*, et ■, pour la résolution minmax, sur les figures 5.12 à 5.15). Comme - dans ce cas d’illustration - il n’y a qu’un paramètre incertain, on peut visualiser directement la fonction coût afin de vérifier quelle méthode permet de trouver le bon maximum. Lorsque  $\hat{\alpha} = 0.2$ , les figures 5.12 et 5.13 indiquent que les deux méthodes trouvent le même maximum -  $\epsilon^{0.2} = 0.029$ , soit 2.9%

6. Dans la version R2009b, *fmincon* propose 3 algorithmes (*active-set*, *interior-point* et *trust-region-reflective*). Nous utilisons l’algorithme *active-set*.

d'erreur de prédiction - évalué lorsque  $x = x_f^w = x_m^w = 1.18$ . Ceci est confirmé sur la figure 5.14 où l'on observe que le maximum se situe sur la même pente convexe que le point de départ à  $x = 1$ . Lorsque  $\hat{\alpha} = 0.8$ , les figures 5.12 et 5.13 indiquent que les deux méthodes ne trouvent pas le même maximum : soit  $\epsilon_m^{0.8} = 0.14$  (resp.  $\epsilon_f^{0.8} = 0.07$ ) le maximum obtenu à  $x_m^w = 0.28$  (resp.  $x_f^w = 1.72$ ) par la méthode minmax (resp. fmincon). En examinant la figure 5.15, on s'aperçoit, dans ce cas précis, que le maximum ne se trouve pas sur la même pente convexe que le point de départ. La fonction *fmincon* étant un algorithme d'optimisation local, le résultat donne un maximum local se situant dans le bassin d'attraction du point de départ et qui ne correspond pas au maximum global sur l'ensemble de variation de  $x$  à  $\hat{\alpha} = 0.8$ . Par contre, la méthode minmax évaluant les bornes du paramètre incertain permet d'obtenir le maximum global à  $\hat{\alpha} = 0.8$ . La « vraie » courbe de robustesse est donc celle obtenue par la méthode minmax.

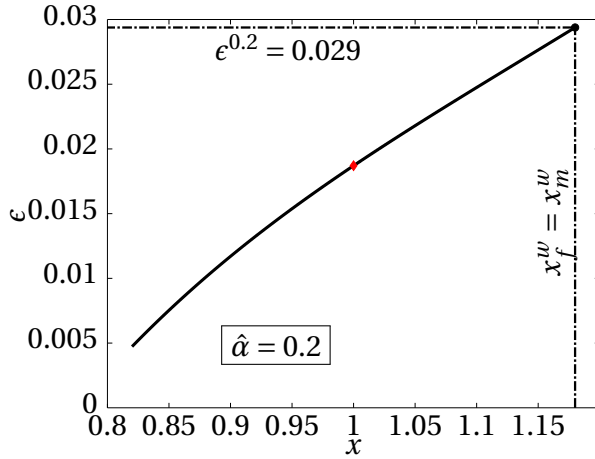


FIG. 5.14: Erreur de prédiction en fonction de  $x$  lorsque  $\hat{\alpha} = 0.2$

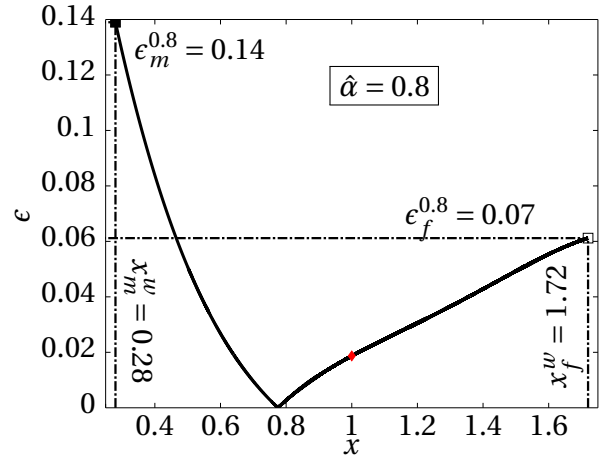


FIG. 5.15: Erreur de prédiction en fonction de  $x$  lorsque  $\hat{\alpha} = 0.8$

Face aux dispersions mises en évidence sur les courbes de robustesse en figure 5.12, on note qu'il est systématiquement nécessaire de vérifier si le problème d'optimisation a bien été résolu : là encore, une incertitude mériterait d'être introduite. Cependant, ce que l'on peut garder à l'esprit, c'est qu'en présence d'un nombre réduit de paramètres incertains il peut être plus efficace (en terme de nombre de calcul et de pertinence) d'utiliser la méthode minmax.

Une fois la robustesse du modèle nominal obtenue, nous allons calibrer le modèle dans une démarche robuste (résoudre l'équation (5.40)), c'est à dire que l'on va rechercher le paramètre  $q$  qui maximise la fonction robustesse (les courbes présentées à la figure 5.12 suppo-

soient  $q = q^0$  avec  $q^0$  la valeur indiquée dans le tableau 5.3). La seule évolution par rapport à une obtention classique de la robustesse telle qu'exprimée à l'équation (5.49) provient du rajout d'une boucle d'optimisation. On cherche désormais les paramètres robustes  $q^R$  solution de

$$q^R(\epsilon^c) = \arg\max_q \{\hat{\alpha}(q, \epsilon^c)\}. \quad (5.52)$$

Comme pour l'expansion robuste, les paramètres robustes dépendent directement du niveau d'exigence  $\epsilon^c$  que l'on apporte au système. D'autre part, l'équation (5.52) suggère que l'on fixe  $\epsilon^c$  et que l'on recherche les paramètres  $q$  qui maximise la fonction robustesse  $\hat{\alpha}(q, \epsilon^c)$ . Cependant, dans la pratique, on suit un raisonnement analogue à la méthodologie de calcul des courbes de robustesse : ce n'est pas  $\epsilon^c$  mais  $\hat{\alpha}$  que l'on fixe. Soit  $\hat{\alpha}_i \in \mathcal{J}$ , il est possible de montrer que les paramètres robustes  $q^R$  sont également solutions du problème

$$q^R(\hat{\alpha}_i) = \arg\min_q \left\{ \max_{x \in \mathcal{U}(\hat{\alpha}_i, x^0)} \epsilon \right\}. \quad (5.53)$$

Les paramètres robustes sont donc obtenus après la résolution de deux problèmes d'optimisation. D'après les résultats précédents, le premier problème d'optimisation est résolu efficacement avec une méthode de type « minmax ». Pour la recherche des paramètres robustes, on utilise la fonction de recherche d'optimums locaux *fmincon* disponible dans Matlab®. Ainsi, on résout

$$q^R(\hat{\alpha}_i) = \arg\min_q \{\max\{\epsilon_-^c; \epsilon_+^c\}\}, \quad (5.54)$$

avec  $\epsilon_-^c$  (resp.  $\epsilon_+^c$ ) la valeur de la fonction coût lorsque  $x = (1 - \hat{\alpha}_i)x^0 + \hat{\alpha}_i x_{\min}$  (resp.  $x = (1 - \hat{\alpha}_i)x^0 + \hat{\alpha}_i x_{\max}$ ).

Parmi les trois algorithmes disponibles dans *fmincon* de la version R2009 de Matlab®, seuls les algorithmes *active-set* et *interior-point* peuvent être utilisés pour calculer l'évolution des paramètres robustes en fonction de la robustesse. En effet, pour pouvoir utiliser l'algorithme *trust-region-reflective*, il faut fournir le gradient de la fonction coût - l'erreur de prédiction - à chaque itération, ce que nous ne calculons pas directement. La robustesse est préalablement discrétisée par pas de  $\Delta\hat{\alpha} = 0.0101$  et la figure 5.16 représente l'évolution des paramètres robustes en fonction de la robustesse suivant l'algorithme *active-set* et *interior-point*. Globalement, les deux algorithmes trouvent les mêmes paramètres robustes solutions du problème (5.54), à l'exception du paramètre robuste  $q^R(\hat{\alpha})$  correspondant à  $\hat{\alpha} \approx 0.596$  : un zoom de la figure 5.16 autour de la zone  $\hat{\alpha} \approx 0.596$  est proposé sur la figure 5.17 et permet de distinguer plus clairement la différence d'obtention des paramètres (pour l'algorithme *active-set*  $q^R(\hat{\alpha} = 0.596) = 1.9$  et pour l'algorithme *interior-point*  $q^R(\hat{\alpha} = 0.596) = 1.6$ ).

Afin de vérifier les résultats des deux algorithmes, la figure 5.18 représente l'évolution du

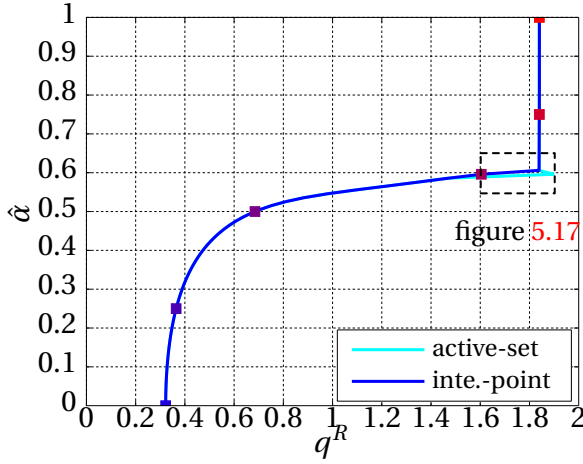
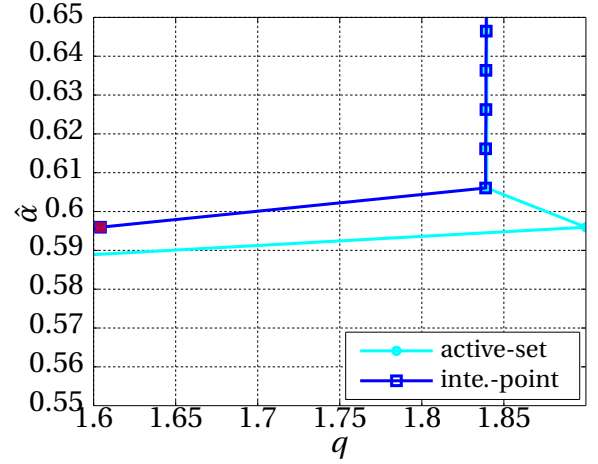

 FIG. 5.16: Évolution de  $\hat{\alpha}$  en fonction de  $q^R$ 


FIG. 5.17: Zoom de la figure 5.16

maximum de l'erreur de prédiction  $\epsilon^c$  lorsque  $x$  atteint ses bornes en fonction des paramètres de décision  $q$  pour différentes valeurs de  $\hat{\alpha}$ . Par exemple, pour  $\hat{\alpha} = 0$ , le paramètre incertain est fixé à sa valeur initiale (dans ce cas particulier,  $\epsilon^c = \epsilon_-^c = \epsilon_+^c$ ) et on recherche simplement  $q$  qui minimise l'erreur de prédiction partant de  $q = 1$  (représenté par un  $\blacklozenge$  sur la figure 5.18). Le minimum est atteint pour  $q^R(\hat{\alpha} = 0) \approx 0.32$  (représenté par un  $\blacksquare$  sur la figure 5.18) que l'on rapporte ensuite sur la figure 5.16 au point de coordonnées  $(q^R(\hat{\alpha} = 0), \hat{\alpha} = 0)$ . Pour  $\hat{\alpha} = 0.25$ , le paramètre incertain  $x$  a pour borne

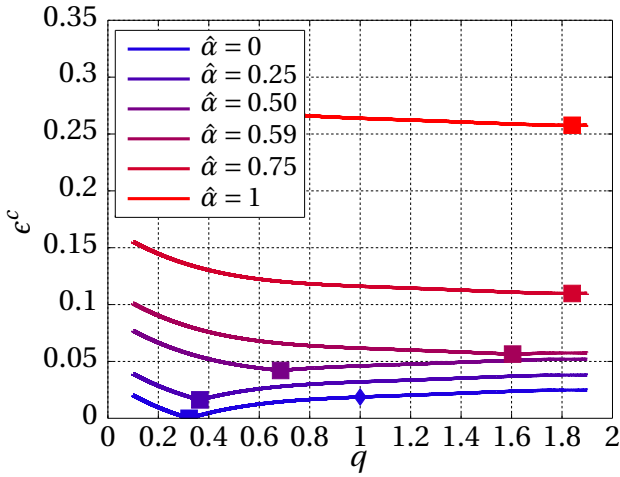
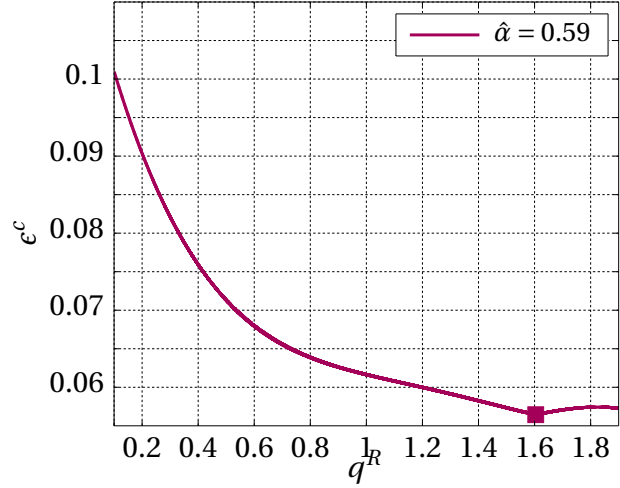
$$(1 - 0.25) + 0.25 \times 0.1 = 0.775 \leq x \leq (1 - 0.25) + 0.25 \times 1.9 = 1.225. \quad (5.55)$$

La figure 5.18 représente le maximum de l'erreur de prédiction  $\epsilon^c$  lorsque  $x = 0.775$  ou  $x = 1.222$  pour le cas  $\hat{\alpha} = 0.25$ . Le minimum de cette fonction fournit le paramètre robuste

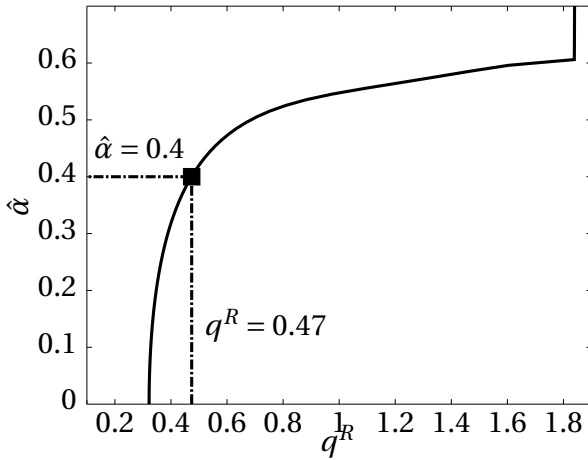
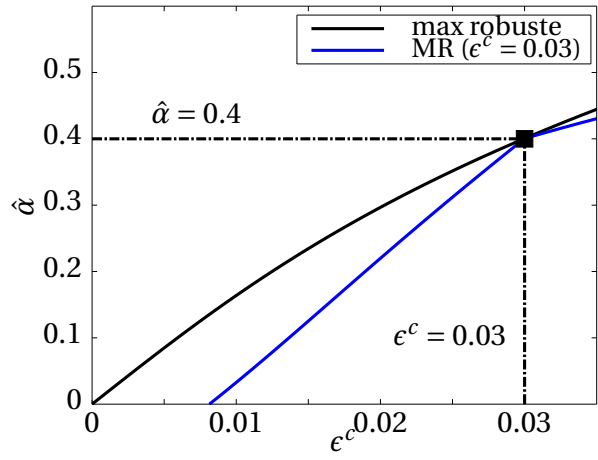
$$q^R(\hat{\alpha} = 0.25) \approx 0.36 \quad (5.56)$$

associé au cas  $\hat{\alpha} = 0.25$  que l'on reporte ensuite sur la figure 5.16 au point de coordonnées  $(q^R(\hat{\alpha} = 0.25), \hat{\alpha} = 0.25)$ . Finalement, comme nous pouvons l'observer sur la figure 5.17, les deux algorithmes fournissent des paramètres robustes différents pour le cas  $\hat{\alpha} = 0.59$ . En visualisant la figure 5.19, le minimum est obtenu lorsque  $q = 1.6$ , ce qui valide (resp. invalide) le résultat fourni par l'algorithme *interior-point* (resp. *active-set*).

Désormais, nous avons toutes les informations disponibles pour faire des prédictions robustes vis-à-vis des méconnaissances affectant  $x$ . En effet, nous connaissons les paramètres robustes  $q^R$  pour toutes les valeurs de  $\hat{\alpha} \in [0; 1]$ . La courbe noire (légende max robuste pour maximum de la robustesse) sur les figures 5.21 et 5.22 fournit l'erreur minimale de prédiction lorsque  $x \in \mathcal{U}(\alpha, x^0)$  : on ne peut pas obtenir une erreur de prédiction  $\epsilon$  inférieure à celle


 FIG. 5.18: Évolution de  $\epsilon^c$  vs  $q$ 

 FIG. 5.19: Évolution de  $\epsilon^c$  vs  $q$  ( $\hat{\alpha} = 0.59$ )

représentée sur la courbe noire lorsque  $\hat{\alpha} \in [0; 1]$ . Cette courbe de robustesse particulière, même si elle représente un modèle avec le paramètre de décision qui évolue, possède les mêmes propriétés qu'une courbe de robustesse classique : elle est monotone croissante.


 FIG. 5.20: Évolution de  $\hat{\alpha}$  en fonction de  $q^R$ 

 FIG. 5.21: Choix du modèle robuste ( $\epsilon^c = 0.03$ )

Généralement, quand on construit un modèle, il doit répondre à un certain nombre de spécifications indiquées dans un cahier des charges : typiquement, l'erreur de prédiction doit être inférieure à une certaine valeur critique  $\epsilon^c$ . Par exemple, si  $\epsilon^c = 0.03$ , l'analyste doit démontrer que son modèle permette de prédire le premier mode expérimental avec une précision inférieure à 3%.

En présence de méconnaissance, il est préférable de choisir un modèle optimal au sens de la

robustesse plutôt qu'un modèle optimal au sens de la performance car ce dernier n'a aucune robustesse vis-à-vis des méconnaissances [22, 24, 116]. L'analyste est donc invité à choisir le modèle qui maximise la robustesse. Pour cela, lorsque  $\epsilon^c = 0.03$ , on évalue tout d'abord la valeur maximale de la robustesse en examinant la figure 5.21 :  $\hat{\alpha} = 0.4$ . Pour obtenir les paramètres robustes  $q^R$  à  $\hat{\alpha} = 0.4$ , on examine la figure 5.20 :  $q^R = 0.47$ . Pour  $\epsilon^c = 0.03$ , l'analyste doit donc choisir le modèle avec le paramètre de décision  $q^R = 0.47$ . La courbe bleue (légende MR - pour modèle robuste - ( $\epsilon^c = 0.03$ ) sur la figure 5.21) est la courbe de robustesse correspondant au modèle  $q^R = 0.47$  et permet de confirmer que le modèle  $q^R$  est bien celui qui maximise la robustesse pour  $\epsilon^c = 0.03$ .

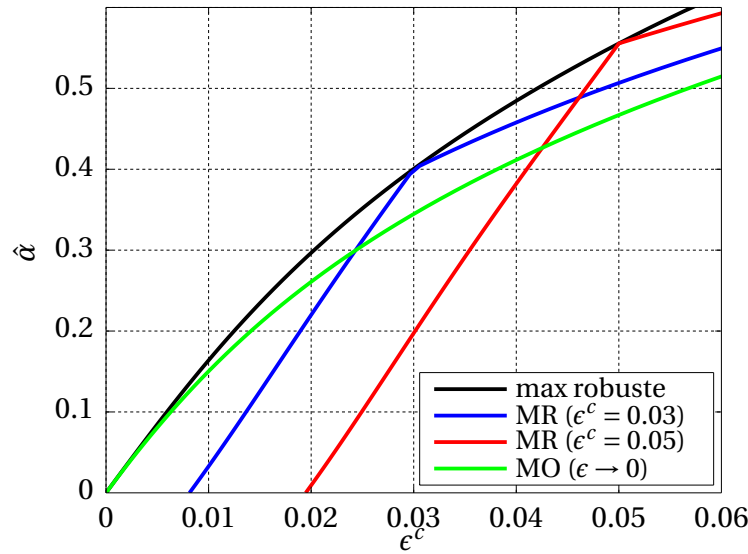


FIG. 5.22: Compromis modèle robuste / modèle optimal

Finalement, la figure 5.22 permet d'illustrer les compromis que l'on doit avoir à l'esprit lorsque l'on calibre un modèle. La courbe rouge (légende MR ( $\epsilon^c = 0.05$ )) est la courbe de robustesse du modèle calibré dans une démarche robuste et satisfaisant une erreur de prédiction  $\epsilon^c = 0.05$ . La courbe verte (légende MO ( $\epsilon^c \rightarrow 0$ ) - pour modèle optimal) est la courbe de robustesse d'un modèle calibré de manière à minimiser l'erreur de prédiction. En présence de méconnaissance et bien que le modèle MO fournisse une erreur de prédiction proche de 0 et satisfaisant largement  $\epsilon^c = 0.03$  ou  $\epsilon^c = 0.05$  à  $\hat{\alpha} = 0$ , ce modèle permet de tolérer moins d'incertitude sur le paramètre incertain que les modèles robustes : à  $\epsilon^c = 0.03$  (resp.  $\epsilon^c = 0.05$ ), on peut tolérer 36% (resp. 49.5%) d'incertitude sur  $x$ , correspondant à  $\hat{\alpha} = 0.4$  (resp.  $\hat{\alpha} = 0.55$ ), pour le modèle robuste tandis que l'on peut tolérer environ 28.8% (resp. 41.4%), correspondant à  $\hat{\alpha} = 0.32$  (resp. 0.46), pour le modèle optimal vis-à-vis de la performance. Les gains



que l'on peut observer sur les tolérances des paramètres incertains suivant que l'on adopte une démarche « robuste-optimal » ou « performance-optimal » seront toujours en faveur d'une démarche robuste-optimal. Cependant, comme c'est le cas ici, ces gains sont parfois mesurés. C'est donc uniquement à l'issue de la démarche de calibration robuste que l'on est en mesure de l'affirmer (*a priori* cela paraît difficile). Lorsqu'un modèle est utilisé pour supporter des décisions, la calibration robuste doit permettre de donner plus de crédit aux résultats de simulations en permettant au modèle d'être robuste vis-à-vis des méconnaissances.

Évidemment, ce cas-test est simplifié, la philosophie et les conclusions générales restant néanmoins les mêmes pour des cas plus complexes. Nous avons restreint volontairement l'étude à deux paramètres (un paramètre de décision et un paramètre incertain) afin d'expliquer clairement les étapes nécessaires pour la construction des courbes de robustesse et facilitant ainsi la prise de décision robuste en présence de méconnaissances sévères. Cette restriction facilite également la visualisation de la fonction coût, ce qui est plus délicat lorsque le nombre de paramètre devient conséquent et/ou lorsque la fonction coût s'exprime comme une fonction multi-objectif. Enfin, cette restriction ainsi que les détails apportés permettent de valider l'approche de résolution pour la calibration robuste d'un modèle. La section suivante présente des résultats plus proches de la réalité, la démarche étant sensiblement la même.

#### 5.4.4 Cas 2 : étude à neuf paramètres pour une prédiction robuste

Dans cette section, on présente les résultats d'une calibration robuste lorsque les neuf paramètres sont pris en considération. Toutefois, nous nous limitons à la prédiction du premier mode expérimental. Dans ce cas d'étude, nous considérons que les modules transverses obtenus à la suite du calcul d'homogénéisation sont les paramètres de décision (ou de calibration) tandis que les autres modules transverses (ceux obtenues avec des facteurs 1/2 et 3/4) sont les paramètres incertains. Ainsi, en accord avec les notations introduites dans la section 5.4.1, on a :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{p_1}{p_1^0} & \frac{p_2}{p_2^0} & \frac{p_3}{p_3^0} & \frac{p_7}{p_7^0} & \frac{p_8}{p_8^0} & \frac{p_9}{p_9^0} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \frac{p_4}{p_4^0} & \frac{p_5}{p_5^0} & \frac{p_6}{p_6^0} \end{bmatrix}, \quad (5.57)$$

avec  $p_i^0$  les paramètres dont les valeurs sont renseignées dans le tableau 5.3.

Partant d'un métamodèle le plus prédictif possible, l'objectif de cette section est de proposer un modèle - choisir les paramètres  $\mathbf{q}$  - dont la prédiction de la première fréquence propre expérimentale sera robuste vis-à-vis des méconnaissances affectant  $\mathbf{x}$ . Les incertitudes affectant  $\mathbf{x}$  seront modélisées par le modèle d'incertitude info-gap formulé à l'équation (5.38)

avec  $\forall i \in \{1, \dots, 6\}$

$$x^{0i} = 1 \quad , \quad x_{\min}^i = 0.5 \quad \text{et} \quad x_{\max}^i = 1.5. \quad (5.58)$$

Pour construire le métamodèle, nous constituons une base d'apprentissage de 2500 échantillons avec un tirage LHS (*Latin Hypercube Sampling* [87]) uniforme entre [0.5; 1.5]. Le choix d'un tirage LHS uniforme n'est pas forcément optimal au regard du conditionnement de la matrice des entrées (contrairement à un plan d'expérience) mais permet d'avoir à disposition suffisamment d'échantillons pour pouvoir obtenir les coefficients d'un polynôme dont le degré est supérieur à 2 et comportant 9 variables (soit 967 coefficients).

Par la présence d'un nombre plus conséquent de paramètres, l'évaluation de la qualité du métamodèle ne peut plus se faire en visualisant la forme de la surface générée. En plus de l'indicateur MSE présenté à l'équation (5.47), on utilise les trois autres indicateurs suivants afin d'évaluer la capacité des données à être prédite par un métamodèle :

- le critère  $R^2$  défini comme

$$R^2(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{y}}) = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n_s} (y^i - \hat{y}^i)^2}{\sum_{i=1}^{n_s} (y^i - \bar{y})^2}, \quad (5.59)$$

- l'erreur relative absolue moyenne ERAM définie (en pourcent) comme

$$\text{ERAM}(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{y}}) = 100 \times \frac{1}{n_s} \sum_{i=1}^{n_s} \frac{|y^i - \hat{y}^i|}{|y^i|}, \quad (5.60)$$

- le maximum de l'erreur relative absolue MERA défini comme

$$\text{MERA}(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{y}}) = 100 \times \max_i \left( \frac{|y^i - \hat{y}^i|}{|y^i|} \right), \quad (5.61)$$

avec  $n_s$  le nombre d'échantillon de la base de test,  $y^i$  la réponse du modèle EF à l'échantillon  $i$  dont la moyenne sur les  $n_s$  échantillons est  $\bar{y}$  et  $\hat{y}^i$  la réponse correspondante du métamodèle.

La base d'échantillons de test a été constituée après un tirage LHS uniforme de  $n_s = 500$  échantillons complètement indépendant de la base d'échantillons d'apprentissage : avec ces échantillons, on étudie la généralisabilité du métamodèle c'est à dire sa capacité à prédire des réponses non-utilisés lors de sa construction. Le tableau 5.4 présente les résultats des indicateurs suivant le type de métamodèle que l'on retient (Pi est un polynôme de degré  $i$  avec prise en compte des termes de couplages). À la lecture du tableau, le polynôme de degré 4 semble être assez prédictif. En effet, la faible valeur du critère ERAM indique qu'en moyenne le métamodèle prédit les réponses exactes avec une erreur de prédiction inférieure

	MSE (en %)	R <sup>2</sup>	ERAM (en %)	MERA (en %)
P2	$1.6 \times 10^{-4}$	1	11.02	362.4
P3	$8.9 \times 10^{-6}$	1	2.08	88.6
P4	$1.4 \times 10^{-6}$	1	0.75	15.0

TAB. 5.4: Indicateurs de prédictivité des métamodèles suivant le degré considéré

à 1%. Quant au critère MERA, il permet éventuellement de détecter des défaillances locales du métamodèle, une forte valeur du MERA contrastée avec une faible valeur d'ERAM indiquant que la prédiction est bonne en moyenne mais mauvaise pour au moins un échantillon. Cependant, dans notre cas, la forte valeur du critère MERA provient aussi d'un échantillon  $i$  dont la valeur exacte est proche de 0 :  $|y^i| \approx 2.61 \times 10^{-4}$  alors que  $|\hat{y}^i| \approx 2.21 \times 10^{-4}$ . L'importance de ce critère est donc à relativiser. On note également que le critère R<sup>2</sup> semble assez peu sensible à la précision du métamodèle. Pour la suite, nous utilisons le polynôme P4.

Ensuite, pour construire les courbes de robustesse, on s'appuie sur la démarche pratique décrite à l'annexe A : on souhaite obtenir la fonction robustesse sur l'intervalle  $\mathcal{J} = [0; 1]$ . On discrétise l'intervalle  $\mathcal{J}$  par pas de  $\Delta\hat{\alpha} = 0.0101$  avec  $\hat{\alpha}_{i+1} = \hat{\alpha}_i + \Delta\hat{\alpha}$  et  $\hat{\alpha}_0 = 0$ . Pour chaque  $\hat{\alpha}_i \in \mathcal{J}$ , on résout le problème d'optimisation sous contrainte suivant

$$\epsilon^c = \max_{\mathbf{x} \in \mathcal{U}(\hat{\alpha}_i, \mathbf{x}^0)} \epsilon. \quad (5.62)$$

Comme précédemment, nous avons utilisé les approches « minmax<sup>7</sup> » et « fmincon » pour résoudre le problème d'optimisation (5.62). Concernant la résolution fmincon, nous avons utilisé les algorithmes *active-set* et *interior-point*. La figure 5.23 présente les trois courbes de robustesse obtenues. En dehors de quelques points, on peut affirmer que les courbes de robustesse sont les mêmes, ce qui permet d'accorder plus de crédit aux courbes et d'être plus confiant dans la réussite du problème d'optimisation. À titre d'illustration, la figure 5.24 présente l'évolution du pire-cas pour un paramètre incertain. On voit apparaître, ici, clairement les différents paramètres qui maximisent l'erreur de prédiction suivant l'algorithme que l'on utilise : des variations importantes sont observées. On remarque également que ces fortes variations n'impactent que très légèrement les courbes de robustesse : l'analyse de Morris (cf. figure 5.10) nous indiquent que le paramètre  $p_2 = x_2 \times p_2^0$  influence faiblement la prédiction des fréquences propres. Par contre, l'évolution de  $x_4$  (directement lié à  $p_7$ , le paramètre le plus influent dans la prédiction des fréquences propres) en fonction de  $\hat{\alpha}$  - non représentée ici - est la même suivant les approches pour résoudre le problème d'optimisation (5.62).

7. L'approche minmax est néanmoins très basique : on évalue seulement deux modèles à savoir un modèle dans lequel tous les paramètres incertains atteignent leurs bornes inférieures et un modèle dans lequel tous les paramètres incertains atteignent leurs bornes supérieures.

Ici, la méthode minmax fournit les erreurs maximums de prédiction par rapport aux deux autres méthodes : c'est celle qui permet d'obtenir la bonne courbe de robustesse.

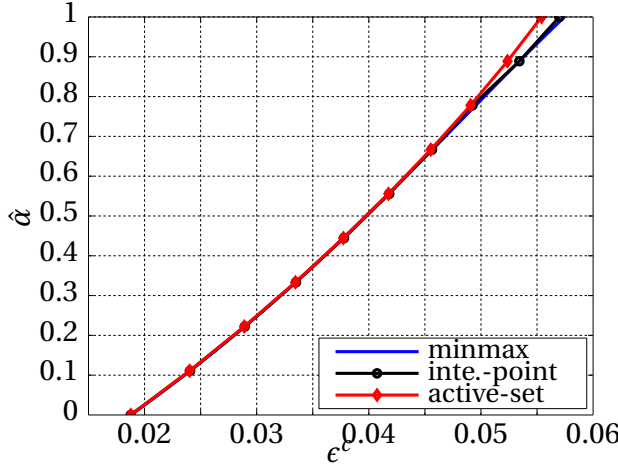


FIG. 5.23: Courbes de robustesse

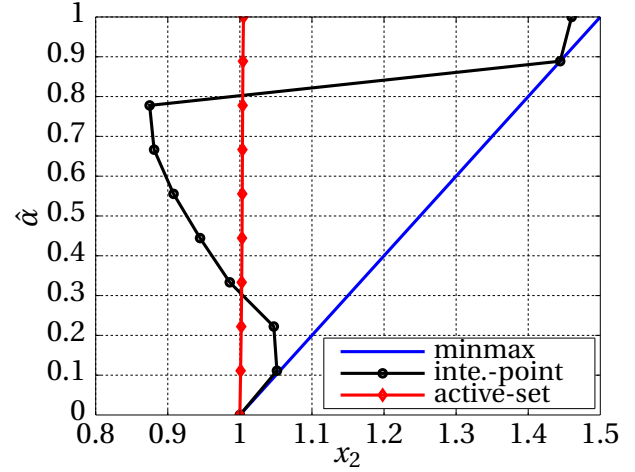


FIG. 5.24: Pire cas pour  $x_2$

Comme les courbes présentées sur la figure 5.23 permettent d'évaluer l'impact des méconnaissances sur les prédictions du modèle nominal, on va chercher ensuite à calibrer le modèle de manière à minimiser cet impact. La figure 5.25 représente l'évolution des paramètres robustes en fonction de la robustesse. Nous avons retenu l'algorithme *interior-point* de *fmincon* pour la recherche des paramètres robustes. De manière similaire à la section 5.4.3, la figure 5.26 présente les courbes de robustesse permettant de mettre en évidence les compromis que l'on doit avoir à l'esprit lorsque l'on calibre un modèle. La courbe noire (légende max robuste pour maximum de la robustesse) fournit l'erreur minimale de prédiction lorsque  $\mathbf{x} \in \mathcal{U}(\alpha, \mathbf{x}^0)$  : on ne peut pas obtenir une erreur de prédiction  $\epsilon$  inférieure à celle représentée sur la courbe noire lorsque les paramètres incertains appartiennent au modèle d'incertitude info-gap. La courbe bleue (resp. verte) de légende « MR ( $\epsilon^c = 0.03$ ) » (resp. « MR ( $\epsilon^c = 0.05$ ) ») représente la courbe de robustesse du modèle calibré dans une démarche robuste lorsque  $\epsilon^c = 0.03$  (resp.  $\epsilon^c = 0.05$ ) et la courbe rouge (légende MN) représente la courbe de robustesse du modèle nominal. On s'aperçoit, dans ce cas, que le modèle MR ( $\epsilon^c = 0.03$ ) est également celui qui minimise l'erreur de prédiction lorsque  $\hat{\alpha} = 0$ . Cela ne contredit pas les conclusions précédemment établies mais indique simplement que - dans ce cas particulier - le modèle performance optimale et le modèle robuste optimal sont les mêmes modèles : ceci est néanmoins valable jusqu'à  $\hat{\alpha} \approx 0.75$ . Si l'analyste doit démontrer que son modèle fournisse une erreur de prédiction inférieure à  $\epsilon^c = 0.05$  alors il est préférable de choisir le modèle MR ( $\epsilon^c = 0.05$ ) car ce modèle permet de tolérer plus d'incertitude sur les paramètres méconnus que le modèle performance optimale.

	$G_{zx}$	$G_{xy}$	$G_{xy}$
<b>Valeurs nominales (en GPa)</b>	82.1	51.2	51.2
<b>Valeurs robustes (en GPa) pour <math>\epsilon^c = 0.03</math></b>	41.05	50.96	51.07
<b>Valeurs robustes (en GPa) pour <math>\epsilon^c = 0.05</math></b>	56.23	25.6	25.6

TAB. 5.5: Paramètres de la zone prox permettant une prédiction robuste de la fréquence identifiée du mode 1 vis-à-vis des méconnaissances affectant les modules transverses de la culasse et des dents

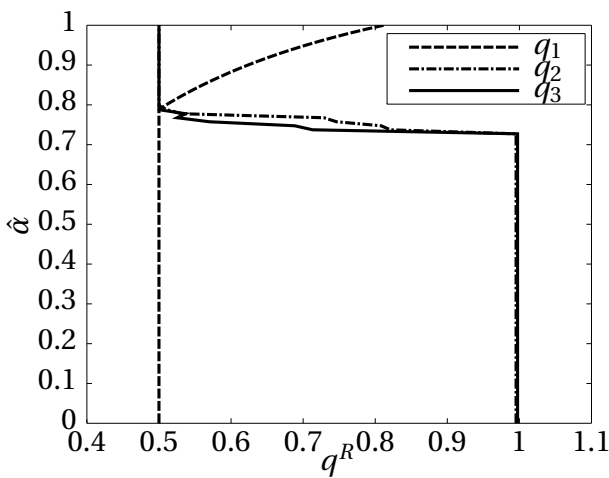


FIG. 5.25: Paramètres robustes en fonction de  $\hat{\alpha}$

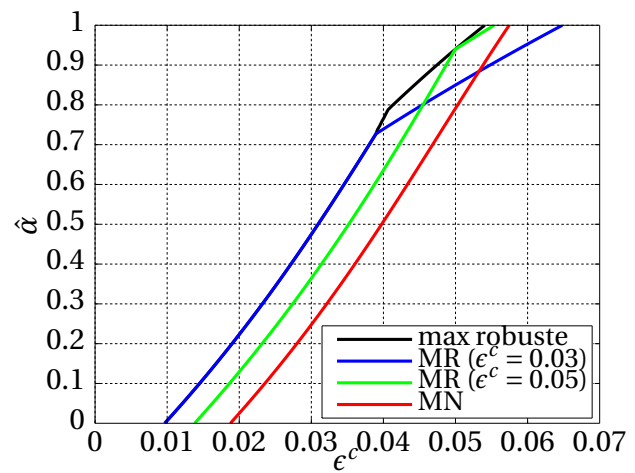


FIG. 5.26: Courbes de robustesse

En pratique et si l'on remonte aux paramètres physiques, le tableau 5.5 présente un récapitulatif des paramètres robustes pour deux valeurs d'erreurs de prédiction critiques  $\epsilon^c = 0.03$  et  $\epsilon^c = 0.05$ . L'analyste doit par exemple démontrer que son modèle permette de prédire la fréquence du premier mode identifié lors d'essais avec une erreur de prédiction inférieure ou égale à  $\epsilon^c$ . Comme les modules transverses de la culasse et des dents ne sont pas précisément connus (leurs valeurs ne sont pas justifiées par le calcul), l'analyste est invité à choisir le modèle dont la prédiction est la plus robuste vis-à-vis de ces méconnaissances tout en satisfaisant le niveau de fidélité exigé (la valeur de  $\epsilon^c$ ).

Ainsi, si les paramètres des modules transverses de la zone prox ont les valeurs exprimées sur le tableau 5.5, pour le niveau de fidélité donné  $\epsilon^c$ , alors le tableau 5.6 nous fournit les valeurs des tolérances acceptables sur les paramètres incertains (les modules transverses des zones culasse et dent) en fonction des modèles choisis. Encore une fois, lorsque le modèle est calibré dans une démarche robuste, il est possible de tolérer plus d'incertitude sur les

	Tolérance acceptable du modèle robuste (en %)	Tolérance acceptable du modèle nominal (en %)
$\epsilon^c = 0.03$	23.7	12.6
$\epsilon^c = 0.05$	47	39.9

TAB. 5.6: Tolérances acceptables sur les paramètres incertains en fonction des modèles choisis : modèle nominal, modèles calibrés dans une démarche robuste pour  $\epsilon^c = 0.03$  et  $\epsilon^c = 0.05$

paramètres incertains que lorsque l'on se concentre uniquement sur la fidélité vis-à-vis des données. Ce tableau permet également d'illustrer le fait que plus on exige un niveau de fidélité élevé ( $\epsilon^c \rightarrow 0$ ) plus il est difficile de tolérer des variations sur les paramètres incertains (moins les prédictions seront robustes) : fidélité vis-à-vis des données et robustesse vis-à-vis des méconnaissances sont antagonistes.

Ce cas plus proche de la réalité permet de parvenir aux mêmes conclusions que précédemment, à savoir qu'en présence de méconnaissance il est préférable d'opter pour un modèle robuste optimal plutôt que d'opter pour un modèle performance optimale. En effet, les tolérances sur les paramètres incertains sont toujours plus grandes pour le modèle robuste optimal que pour le modèle performance optimal tout en satisfaisant une erreur de prédiction satisfaisante vis-à-vis du cahier des charges. En présence de méconnaissance et en connaissant la précision avec laquelle on souhaite que le modèle puisse prédire une réponse, précision que l'on note  $\epsilon^c$ , on choisit le modèle - en fait les paramètres  $\mathbf{q}^R$  - qui maximise la fonction robustesse  $\hat{a}(\mathbf{q}, \epsilon^c)$ .

Cette étude plus complexe permet de mettre en évidence les difficultés potentielles qui peuvent survenir lorsque l'on souhaite calibrer un modèle dans une démarche robuste. On propose ci-dessous une liste non exhaustive :

- La réponse que l'on observe dans notre étude - une erreur relative sur la première fréquence propre expérimentale - dérive directement d'une quantité énergétique se prêtant bien à l'utilisation de métamodèle. Qu'en est-il pour les autres quantités physiques ? Toutes les réponses ne peuvent pas être représentées par un métamodèle (cf. par exemple dans le cas d'une réponse non-linéaire [152]). L'utilisation de bases de Ritz enrichies est probablement la meilleure réponse à apporter lorsque la réponse dérive directement d'un comportement modal typique des basses fréquences.
- À précision équivalente, plusieurs métamodèles peuvent être compétitifs. Dès lors, quel est l'impact du choix du métamodèle sur les décisions que l'on prendra en s'ap-

puyant sur la courbe de robustesse ?

- Une autre difficulté, plus clairement mise en évidence, porte sur les techniques mises en œuvre pour la résolution des différents problèmes d'optimisations. Les méthodes employés dans ce mémoire permettent d'obtenir un optimum local situé dans le bassin d'attraction du point de départ ou se limitent à l'évaluation des bornes. Des approches - éventuellement plus efficaces - comme les algorithmes génétiques ou la recherche d'un point de départ optimal (situé dans le même bassin d'attraction que l'optimum global) pour des algorithmes type `fmincon` n'ont pas été testées.

L'ensemble de ces points constitue ce qui semble être - du point de vue de l'auteur - les difficultés principales à surmonter pour de futurs travaux sur la construction de modèle robuste.

## 5.5 Bilan

Après un état de l'art sur les méthodes de réduction adaptées à des modèles paramétrés, le premier objectif était d'étudier la possibilité d'utiliser des bases de Ritz enrichies - typiquement rencontrées pour la résolution de problèmes aux valeurs propres paramétrés - pour la résolution du système linéaire découlant de l'ERCE. Après avoir formulé les différentes possibilités de réduction (au niveau des matrices du modèles avec un ou deux sous-espaces, sur le système  $2N$ ), l'exemple que l'on a traité n'a pas permis de faire ressortir clairement et sans ambiguïté une méthode de réduction : on a toutefois pu avancer qu'une réduction du type multi-modèle semble être bien adaptée pour l'exemple traité. Ces investigations demanderaient néanmoins à être enrichies par l'étude de systèmes plus complexes.

Le deuxième objectif de ce chapitre était de construire, dans une démarche robuste, un modèle visant à prédire des fréquences propres d'un système de complexité industrielle. Nous avons utilisé la calibration robuste permettant au modèle de faire des prédictions robustes vis-à-vis des méconnaissances. Après une description du système étudié, nous avons détaillé, étape par étape, les éléments clés permettant de calibrer de manière robuste un modèle : la restriction à un paramètre de calibration et un paramètre incertain répond d'une part à une volonté pédagogique et permet d'autre part d'apporter des éléments de validation. Une étude, plus complexe, a tout d'abord permis de délivrer les mêmes enseignements. Cette dernière étude a également permis de mettre en évidence les difficultés potentielles lorsque l'on cherche à obtenir un modèle robuste vis-à-vis des méconnaissances constituant de fait des pistes de recherches pour de futurs travaux dans le domaine.

## Conclusion générale et perspectives

Les travaux de recherche présentés dans ce mémoire visent à fournir des éléments de réponse autour de la construction de modèles prédictifs du comportement vibratoire des alternateurs. L'objectif principal est la construction d'un modèle hybride robuste, c'est à dire un modèle dont les erreurs de prédiction sont inférieures à un niveau critique de fidélité vis-à-vis des données et maximisant la robustesse vis-à-vis des incertitudes.

Le cadre scientifique dans lequel s'inscrit cette thèse a été présenté dans le chapitre 2 : les thématiques très actuelles de validation et de modèle et de quantification d'incertitude dans les modèles ainsi que des thématiques plus matures comme l'expansion de données expérimentales délimitent ces travaux de recherches. Les principales méthodes permettant de prendre en compte l'incertitude dans la construction des modèles ont été rappelées : au regard de cette synthèse, nous avons tout d'abord souligné la capacité de la théorie info-gap à être une extension de l'ensemble des stratégies de modélisation de l'incertitude dans les modèles. En plus de délivrer des outils pratiques d'aide à la décision, la théorie info-gap, comme théorie de la décision, se distingue des autres approches en invitant l'analyste à se poser la question suivante : en présence de méconnaissance, est-il possible de modifier le système étudié afin de le rendre insensible vis-à-vis des incertitudes ? On parle alors de « robustification des décisions ». Au vu du contexte industriel pour lequel la modélisation des alternateurs comporte quelques méconnaissances sévères, ces éléments s'avèrent être très intéressants et justifient l'exploitation de la théorie info-gap tout au long de cette thèse.

Le chapitre 3 a permis d'illustrer une façon assez basique d'exploiter la théorie info-gap à savoir : quel est l'impact des méconnaissances affectant les solutions propres sur des niveaux de réponses? Cette approche a permis de donner des éléments de décision bien que les analyses modales expérimentales des alternateurs soient réalisées à l'arrêt et qu'il n'existe pas - aujourd'hui - de modèle permettant de prédire l'évolution des solutions propres lors



---

du fonctionnement. Il est donc nécessaire de disposer d'outils permettant d'évaluer rapidement l'impact des méconnaissances affectant les solutions propres sur les niveaux de réponses. Dans ce chapitre, nous avons également souligné le fait que les courbes de robustesse dépendent du modèle d'incertitude info-gap que l'analyste choisit *a priori*, ce qui est rarement fait dans les publications exploitant la théorie info-gap. Pour argumenter le choix d'un modèle d'incertitude plutôt qu'un autre et lorsque l'on dispose d'information, nous avons utilisé et testé une technique de calibration de modèle d'incertitude info-gap sur des systèmes théorique et réel. À notre connaissance, ces techniques n'ont jamais été utilisées en dynamique des structures.

L'expansion de données expérimentales est exploitée dans ce mémoire afin d'enrichir la représentativité du modèle EF. Par sa formulation générique et sa capacité à résister aux bruits, l'erreur en relation de comportement étendue (ERCE) constitue l'opérateur d'expansion privilégié. Néanmoins, la modélisation d'un alternateur comporte de nombreuses méconnaissances et peu d'information est disponible. Au lieu de chercher à les réduire (le niveau de méconnaissance est tel qu'elles seront toujours présentes) ou de chercher à évaluer leurs impacts (mais comment les modéliser?) sur des sorties d'intérêt, la méthode proposée dans ce travail a pour objectif de rechercher le modèle le plus robuste vis-à-vis de ces méconnaissances tout en satisfaisant un niveau acceptable de fidélité. Après avoir appliqué cette méthode sur un modèle EF d'alternateur, nous avons notamment mis en évidence et expliqué les difficultés numériques liées à la résolution du système linéaire découlant de l'ERCE.

Le chapitre suivant a pour objectif de mettre en évidence les deux principales stratégies existantes pour sélectionner un modèle dans une démarche robuste, et ce, à moindre coût : l'utilisation de bases de réduction et de métamodèles. Nous avons étudié la possibilité d'utiliser des bases de réduction pour la résolution de systèmes linéaires paramétrés découlant de l'ERCE : une réduction de type multi-modèle semble être bien adaptée. La démarche de sélection de modèles robustes - dont l'objectif est la prédiction de la première fréquence propre - a ensuite été appliquée sur un système industriel représentatif du contexte industriel proposé par EDF R&D : on parle de calibration robuste. L'objectif de la calibration robuste est d'obtenir un modèle dont les prédictions seront robustes vis-à-vis des méconnaissances. Cette dernière application a permis encore une fois de mettre en évidence les compromis existants - mais rarement étudiés - entre fidélité vis-à-vis des données et robustesse vis-à-vis des incertitudes. En présence de méconnaissance, l'analyste est invité à choisir un modèle optimal au sens de la robustesse plutôt qu'un modèle optimal au sens de la fidélité vis-à-vis des données car ce dernier n'a aucune robustesse vis-à-vis des incertitudes.

L'ensemble de ces contributions permet également d'envisager des perspectives intéressantes, évoquées dans le document, et parmi lesquelles on peut distinguer principalement :

- **la calibration du modèle d'incertitude** : le modèle d'incertitude info-gap joue un rôle important sur les courbes de robustesse. Peu de travaux s'attachent pourtant à trouver des stratégies pour améliorer la représentativité du modèle d'incertitude lorsque de l'information est disponible. Du point de vue de l'auteur, il serait intéressant d'enrichir les travaux dans ce domaine permettant de donner encore plus de crédit aux courbes de robustesse et plus généralement à l'analyse de robustesse info-gap. Les exemples que l'on a traités se sont restreints à une calibration du type paramétrique, c'est à dire que nous avons seulement pris en compte les paramètres du modèle d'incertitude info-gap dans le processus de calibration du modèle d'incertitude, l'hypothèse forte demeurant sur la forme du modèle d'incertitude.
- **la résolution efficace du système ERCE** : l'utilisation de bases de réduction semble être efficace pour obtenir rapidement le vecteur étendu. Les exemples que l'on a traités ont mis toutefois en évidence la difficulté des bases de réduction à retrouver le vecteur des résidus, vecteur que l'on utilise pour la localisation d'erreur. Toutefois, malgré l'intérêt porté par la communauté scientifique au sujet de l'ERCE, peu de travaux amènent des réponses claires sur l'utilisation de stratégies permettant de résoudre à moindre coût le système découlant de l'ERCE.
- **cibler l'utilisation des modèles** : actuellement, il est communément admis que plus un modèle peut prédire un nombre important de réponses, plus il est prédictif. Cependant, les investigations que l'on a menées ont montré qu'il est plus difficile de robustifier la prédiction de plusieurs modes que de robustifier la prédiction d'un mode : lors de la calibration de modèle, des phénomènes de compensation entre les paramètres de calibration apparaissent inévitablement. D'autre part, chercher à calibrer un modèle qui vise à prédire un nombre important de réponses peut conduire à un risque de surajustement des modèles, le complexifiant ainsi inutilement [103]. Dès lors, il peut être intéressant de s'interroger sur la pertinence d'utiliser des modèles permettant de prédire un nombre important de réponses : n'est-il pas plus intéressant d'utiliser un modèle plus simple mais robuste ?

---

---

# Bibliographie

- [1] S. **Adhikari** : Wishart random matrices in probabilistic structural mechanics. *Journal of Engineering Mechanics*, 134(12):1029–1044, 2008. (cité p. 22)
- [2] S. **Adhikari**, M.I. **Friswell**, K. **Lonkar** et A. **Sarkar** : Experimental case studies for uncertainty quantification in structural dynamics. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 24(4):473–492, 2009. (cité p. 37)
- [3] S. **Adhikari** et A. **Sarkar** : Uncertainty in structural dynamics: Experimental validation of a wishart random matrix model. *Journal of Sound and Vibration*, 323:802 – 825, 2009. (cité p. 37)
- [4] **AIAA** : Guide for the verification and validation of computational fluid dynamics simulations. *AIAA-G-077-1998*, 1998. (cité p. 18)
- [5] A. **Alarcón** : *Une approche de l'identification en dynamique des structures combinant l'erreur en relation de comportement et le filtrage de Kalman*. Thèse de doctorat, École Polytechnique, 2012. (cité p. 72)
- [6] R.J. **Allemang** : The modal assurance criterion: twenty years of use and abuse. *Journal of Sound and Vibration*, 37(8):14–23, 2003. (cité p. 53)
- [7] C. **Andrieu-Renaud** : *Fiabilité mécanique des structures soumises à des phénomènes physiques dépendant du temps*. Thèse de doctorat, Université Blaise Pascal - Clermont II, 2002. (cité p. 23)
- [8] **ASME** : Guide for the verification and validation of computational solid mechanics. V&V, 10, 2006. (cité p. xi, 17, 18, 20 et 21)
- [9] S. **Asmussen** et P.W. **Glynn** : *Stochastic Simulation: Algorithms and Analysis*, volume 57. Springer, 2007. (cité p. 22)
- [10] J.-G. **Astier**, L. **Dutrech**, P. **Lebailly** et G. **Playe** : note HT-61/05/006/A projet VITAL : Impact du suivi de réseau sur le vieillissement des alternateurs 900 MW. Rapport technique, EDF R&D, Février 2006. (cité p. 4)

- 
- [11] S. **Atamturktur**, F. M. **Hemez**, B. **Williams**, C. **Tome** et C. **Unal**: A forecasting metric for predictive modeling. *Computers & Structures*, 89(23):2377–2387, 2011. (cité p. 19)
- [12] S. **Atamturktur**, Z. **Liu**, S. **Cogan** et H. **Juang**: Calibration of imprecise and inaccurate numerical models considering fidelity and robustness: a multi-objective optimization-based approach. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, pages 1–13, 2014. (cité p. 19)
- [13] S.K. **Au** et J.L. **Beck**: Important sampling in high dimensions. *Structural Safety*, 25(2): 139–163, 2003. (cité p. 22)
- [14] E. **Balmès**: Parametric families of reduced finite element models. theory and applications. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 10(4):381 – 394, 1996. (cité p. 43, 102, 103 et 106)
- [15] E. **Balmès**: Predicted variability and differences between the tests of a single structure. *In Proceedings of IMAC XVI*, 1998. (cité p. 22)
- [16] E. **Balmès**: Sensors, degrees of freedom and generalized mode expansion methods. *In Proceedings of the International Modal Analysis Conference*, 1999. (cité p. 65 et 68)
- [17] E. **Balmès**: Review and evaluation of shape expansion methods. *In Proceedings of IMAC XVIII*, 4062:555–561, 2000. (cité p. 65, 69 et 78)
- [18] B. **Banerjee**, T.F. **Walsh**, W. **Aquino** et M. **Bonnet**: Large scale parameter estimation problems in frequency-domain elastodynamics using an error in constitutive equation functional. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 253:60–72, 2013. (cité p. 72, 75 et 96)
- [19] K.-J. **Bathe** et E. L. **Wilson**: Solution methods for eigenvalue problems in structural mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 6(2):213–226, 1973. (cité p. 10)
- [20] J. **Ben-Abdallah**: *Inversion gaussienne appliquée à la correction paramétrique de modèles structuraux*. Thèse de doctorat, École Polytechnique, 1995. (cité p. 82)
- [21] Y. **Ben-Haim**: *Information-Gap Theory: Decisions Under Severe Uncertainty*. Academic Press, London, 2001. (cité p. 30)
- [22] Y. **Ben-Haim**: *Information-Gap Theory: Decisions Under Severe Uncertainty*. 2nd edition, Academic Press, London, 2006. (cité p. 21, 27, 29, 31, 45, 118 et 129)
- [23] Y. **Ben-Haim**, S. **Cogan** et L. **Sanseigne**: Usability of mathematical models in mechanical decision processes. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 12(1):121–134, 1998. (cité p. 28)
- [24] Y. **Ben-Haim** et F. M. **Hemez**: Robustness, fidelity and prediction-looseness of models. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science*, 468(2137):227–244, 2012. (cité p. 19, 82, 83, 117 et 129)
-

- [25] M. **Benzi**, G. H. **Golub** et J. **Liesen** : Numerical solution of saddle point problems. *Acta numerica*, 14:1–137, 2005. (cité p. 96)
- [26] A. **Bhattacharyya** : On a measure of divergence between two multinomial populations. *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics*, pages 401–406, 1946. (cité p. 19)
- [27] A. **Bouazzouni**, G. **Lallement** et S. **Cogan** : Selecting a ritz basis for the reanalysis of the frequency response functions of modified structures. *Journal of Sound and Vibration*, 199(2):309 – 322, 1997. (cité p. 66, 106 et 107)
- [28] S. **Boyaval**, C. **Le Bris**, T. **Lelièvre**, Y. **Maday**, N. C. **Nguyen** et A. T. **Patera** : Reduced basis techniques for stochastic problems. *Archives of Computational methods in Engineering*, 17(4):435–454, 2010. (cité p. 107)
- [29] M. R. **Brake**, J. A. **Fike**, S. D. **Topping**, R. **Schultz**, R. V. **Field**, N. M. **McPeck-Bechtold** et R. **Dingreville** : Parameterized reduced order models constructed using hyper dual numbers. *Proceedings of the IMAC XXI*, 2014. (cité p. 105)
- [30] F. **Campolongo**, J. **Cariboni** et A. **Saltelli** : An effective screening design for sensitivity analysis of large models. *Environmental modelling & software*, 22(10):1509–1518, 2007. (cité p. 165 et 167)
- [31] E. **Capiez-Lernout** : *Dynamique des structures tournantes à symétrie cyclique en présence d'incertitudes aléatoires: application au désaccordage des roues aubagées*. Thèse de doctorat, Marne-la-Vallée, 2004. (cité p. 23)
- [32] S.A. **Chentouf** : *Simulation et essais dynamiques sur stators de moteurs de traction*. Thèse de doctorat, Université de Franche-Comté, 2011. (cité p. 106 et 107)
- [33] J.L.D. **Comba** et J. **Stolfi** : Affine arithmetic and its applications to computer graphics. *In Proceedings of SIBGRAPI'93*, 1993. (cité p. 25)
- [34] Banque de données terminologiques et linguistiques du gouvernement du **Canada** : <http://www.btb.termiumplus.gc.ca>. (cité p. 27)
- [35] A. P. **Dempster** : Upper and lower probabilities generated by a random closed interval. *The Annals of Mathematical Statistics*, 39(3):957–966, 1968. (cité p. 26)
- [36] A. **Deraemaeker** : *Sur la maîtrise des modèles en dynamique des structures à partir de résultats d'essais*. Thèse de doctorat, École Normale Supérieure de Cachan, 2001. (cité p. 69 et 105)
- [37] A. **Deraemaeker**, P. **Ladevèze** et P. **Leconte** : Reduced bases for model updating in structural dynamics based on constitutive relation error. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 191:2427–2444, 2002. (cité p. 69 et 109)
- [38] O. **Dessombz** : *Analyse dynamique de structure comportant des paramètres incertains*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, 2000. (cité p. 25)

- 
- [39] O. **Dessombz**, F. **Thouverez**, J.-P. **Laîné** et L. **Jézéquel** : Analysis of mechanical systems using interval computations applied to finite elements methods. *Journal of Sound and Vibration*, 239(5):949–968, 2001. (cité p. 25)
- [40] G. **Dreyfus**, J.-M. **Martinez**, M. **Samuelides**, M.B. **Gordon**, F. **Badran**, S. **Thiria** et L. **Herault** : *Réseaux de neurones : méthodologies et applications*. Eyrolles, 2004. (cité p. 102)
- [41] J. **Dupont** et P. **Bouvet** : Bruit rayonné par un moteur électrique: simulation multiphysique. *21ème Congrès Français de Mécanique, 26 au 30 août 2013, Bordeaux, France*, 2013. (cité p. 7)
- [42] J. **Dupont**, P. **Bouvet** et L. **Humbert** : Vibroacoustic simulation of an electric motor: methodology and focus on the structural fem representativity. *In Electrical Machines (ICEM), 2012 XXth International Conference on*, pages 3027–3033. IEEE, 2012. (cité p. 7)
- [43] L. **Dutrech** : Note H-61-2008-01569-FR Procédure d’analyse modale applicable aux stators 900 MW bobinés en STAR. Rapport technique, EDF R&D, 14 Octobre 2008. (cité p. 5)
- [44] P. **Enjalbert** : *Sur la théorie des méconnaissances en conception robuste*. Thèse de doctorat, École Normale Supérieure de Cachan, 2009. (cité p. 26)
- [45] D. J. **Ewins** : *Modal testing: theory and practice*, volume 79. Research studies press Letchworth, 1984. (cité p. 8)
- [46] P. **Feissel** et O. **Allix** : Modified constitutive relation error identification strategy for transient dynamics with corrupted data: the elastic case. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(13):1968–1983, 2007. (cité p. 72)
- [47] R.L. **Fox** et M.P. **Kapoor** : Rates of change of eigenvalues and eigenvectors. *AIAA journal*, 6(12):2426–2429, 1968. (cité p. 105)
- [48] M.I. **Friswell**, J.E. **Coote**, M.J. **Terrell**, S. **Adhikari**, J.R. **Fonseca** et N.A.J. **Lieven** : Experimental data for uncertainty quantification. *In Proceedings of the IMAC XXI*, 2005. (cité p. 37)
- [49] F. **Gant** : *Stratégie de modélisation et de simulation des assemblages de structures aéronautiques en contexte incertain*. Thèse de doctorat, École normale supérieure de Cachan-ENS Cachan, 2011. (cité p. 26)
- [50] R.G. **Ghanem** et P.D. **Spanos** : *Stochastic Finite Element: A Spectral Approach*. Springer-Verlag, 1991. (cité p. 22)
- [51] J.-C. **Golinval** et P. **Collignon** : Comparison of model updating methods adapted to local error detection. *In Proceedings of ISMA 21, Leuven, Belgium*, 1996. (cité p. 68)
- [52] G. **Golub** et W. **Kahan** : Calculating the singular values and pseudo-inverse of a matrix. *Journal of the Society for Industrial & Applied Mathematics, Series B: Numerical Analysis*, 2(2):205–224, 1965. (cité p. 67)
-

- [53] M. **Gérardin** et D.J. **Rixen** : *Théorie des vibrations - Application à la dynamique des structures*. 1996. (cité p. 9)
- [54] P. **Guillaume**, P. **Verboven**, S. **Vanlanduit**, H. Van der **Auwer**aer et B. **Peeters** : A poly-reference implementation of the least-squares complex frequency-domain estimator. *Proceedings of the IMAC XXI*, 2003. (cité p. 161)
- [55] R.J. **Guyan** : Reduction of stiffness and mass matrices. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 3:380, 1964. (cité p. 67)
- [56] H. **Gysin** : Comparison of expansion methods for fe modeling error localization. In *Proceedings of the IMAC VII*, pages 195–204, 1990. (cité p. 67)
- [57] G. **Ham** : *Étude de méthodologies expérimentales et numériques pour la modélisation robuste d'aubes en matériau composite tissé*. Thèse de doctorat, Université de Franche-Comté, 2013. (cité p. 75)
- [58] F. M. **Hemez** : The myth of science-based predictive modeling. In *Foundations '04 Workshop for Verification, Validation, and Accreditation (VV&A) in the 21st Century*, Arizona State University, Tempe, Arizona, October 13-15, 2004. (cité p. 18)
- [59] F. M. **Hemez** : *Uncertainty quantification and the verification and validation of computational models*. John, Wiley and Sons: West Sussex, England, 2005. (cité p. 18 et 102)
- [60] F. M. **Hemez**, S. H. **Atamturktur** et C. **Unal** : Defining predictive maturity for validated numerical simulations. *Computers & structures*, 88(7):497–505, 2010. (cité p. 19)
- [61] F. M. **Hemez** et S.H. **Atamturktur** : The dangers of sparse sampling for the quantification of margin and uncertainty. *Reliability Engineering & System Safety*, 96(9):1220–1231, 2011. (cité p. 121)
- [62] F. M. **Hemez** et Y. **Ben-Haim** : The good, the bad, and the ugly of predictive science. In *4th International Conference on Sensitivity Analysis of Model Output*, pages 8–11, 2004. (cité p. 83)
- [63] F. M. **Hemez** et Y. **Ben-Haim** : Info-gap robustness for the correlation of tests and simulations of a non-linear transient. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 18:1443–1467, 2004. (cité p. 28 et 84)
- [64] F. M. **Hemez** et C. R. **Farrar** : A brief history of 30 years of model updating in structural dynamics. In *Special Topics in Structural Dynamics, Volume 6*, pages 53–71. Springer, 2014. (cité p. 19)
- [65] F.O. **Hoffman** et J.S. **Hammonds** : Propagation of uncertainty in risk assessments: the need to distinguish between uncertainty due to lack of knowledge and uncertainty due to variability. *Risk Analysis*, 14:707–712, 1994. (cité p. 20)
- [66] A. **Hot**, S. **Cogan**, E. **Foltête**, G. **Kerschen**, F. **Buffe**, J. **Buffe** et S. **Behar** : Design of uncertain prestressed space structures: an info-gap approach. In *Proceedings of the International Modal Analysis Conference*, 2012. (cité p. 28)



- 
- [67] E.T. **Jaynes**: Information theory and statistical mechanics i. *Physical Review*, 106(4): 620–630, 1957. (cité p. 22)
- [68] E.T. **Jaynes**: Information theory and statistical mechanics ii. *Physical Review*, 108(2): 171–190, 1957. (cité p. 22)
- [69] R.P. **Jimenez**: *Model Based Structural Damage Assessment Using Vibration Measurements*. Thèse de doctorat, Université de Liège, 1999. (cité p. 68 et 90)
- [70] A. A. **Journeaux**: *Modélisation multi-physique en génie électrique. Application au couplage magnéto-thermo-mécanique*. Thèse de doctorat, Université Paris-Sud, 2013. (cité p. 12)
- [71] P. **Kerfriden**, J.-J. **Ródenas** et S.P.-A. **Bordas**: Certification of projection-based reduced order modelling in computational homogenisation by the constitutive relation error. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 97(6):395–422, 2014. (cité p. 107)
- [72] R. **Kidder**: Reduction of structural frequency equations. *AIAA Journal*, 11 (6), 1973. (cité p. 66)
- [73] U. **Kirsch**: A unified reanalysis approach for structural analysis, design, and optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 25(2):67–85, 2003. (cité p. 107)
- [74] A. Der **Kiureghian** et O. **Ditlevsen**: Aleatory or epistemic? does it matter? *Structural Safety*, 31(2):105 – 112, 2009. Risk Acceptance and Risk Communication Risk Acceptance and Risk Communication. (cité p. 20 et 21)
- [75] G.J. **Klir**: Generalized information theory: aims, results and open problems. *Reliability Engineering and System Safety*, 85:21–38, 2004. (cité p. 20)
- [76] F.H. **Knight**: *Risk, Uncertainty and Profit*. Houghton Mifflin Co., 1921. (cité p. 21)
- [77] L. **Komzsik**: *MSC.Nastran 2001 Numerical Methods: User's Guide*. MacNeal-Schwendler Corporation, 2001. (cité p. 95)
- [78] P. **Ladevèze**: *Comparaison des modèles des milieux continus*. Thèse de doctorat, Université Pierre-et-Marie-Curie, 1975. (cité p. 70)
- [79] P. **Ladevèze**, G. **Puel**, A. **Deraemaeker** et T. **Romeuf**: Sur une théorie des méconnaissances en calcul des structures. *Revue Européenne des Éléments Finis*, 13:571–584, 2004. (cité p. 26)
- [80] P. **Ladevèze**, G. **Puel**, A. **Deraemaeker** et T. **Romeuf**: Validation of structural dynamics models containing uncertainties. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195:373 – 393, 2006. Adaptive Modeling and Simulation. (cité p. 75)
- [81] C. **Lanczos**: An iteration method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, 45:255–282, 1950. (cité p. 10)
-

- [82] J.-P. **Lombard**: *Contribution à la réduction des modèles éléments finis par synthèse modale*. Thèse de doctorat, Université de Franche-Comté, 1999. (cité p. 103 et 106)
- [83] Y. **Maday** et E. M. **Rønquist**: A reduced-basis element method. *Journal of scientific computing*, 17(1-4):447–459, 2002. (cité p. 107)
- [84] P. C. **Mahalanobis**: On the generalised distance in statistics. *Proceedings of the National Institute of Sciences of India*, 2:49–55, 1936. (cité p. 19)
- [85] F. **Massa**, K. **Ruffin**, T. **Tison** et B. **Lallemant**: A complete method for efficient fuzzy modal analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 309:63–85, 2008. (cité p. 25)
- [86] G. **Masson**, B. Ait **Brik**, S. **Cogan** et N. **Bouhaddi**: Component mode synthesis based on an enriched ritz approach for efficient structural optimization. *Journal of Sound and Vibration*, 296:845–869, 2006. (cité p. 106 et 107)
- [87] M.D **McKay**, R.J. **Beckman** et W.J. **Conover**: A comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code. *Technometrics*, 21:239–245, 1979. (cité p. 22 et 131)
- [88] R.E. **Melchers**: Importance sampling in structural systems. *Structural safety*, 6(1):3–10, 1989. (cité p. 22)
- [89] N. **Metropolis** et S. **Ulam**: The monte-carlo method. *Journal of the American Statistical Association*, 44:335 – 341, 1949. (cité p. 22)
- [90] S. **Michot**: *Contributions à la validation de modèles en dynamique des structures*. Thèse de doctorat, Université de Franche-Comté, 2003. (cité p. 67, 72 et 90)
- [91] P. **Millithaler**, E. **Sadoulet-Reboul**, M. **Ouisse**, J.-B. **Dupont** et N. **Bouhaddi**: Efficient methods for the identification of equivalent static and dynamic material properties: Part 1 - multilayered orthotropic laminates. *à paraître*. (cité p. 115)
- [92] P. **Millithaler**, E. **Sadoulet-Reboul**, M. **Ouisse**, J.-B. **Dupont** et N. **Bouhaddi**: 3D homogenization: identification of equivalent anisotropic material properties of heterogeneous structures and dynamic applications on preloaded finite element models and superelements. *In Proceedings of ISMA, Leuven, Belgium*, 2014. (cité p. 7 et 114)
- [93] D. **Moens** et M. **Hanss**: Non-probabilistic finite element analysis for parametric uncertainty treatment in applied mechanics: Recent advances. *Finite Element in Analysis and Design*, 47:4–16, 2011. (cité p. 21, 25 et 26)
- [94] D. **Moens** et D. **Vandepitte**: A survey of non-probabilistic uncertainty treatment in finite element analysis. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 194: 1527–1555, 2005. (cité p. 24)
- [95] M. G. **Mollineaux**, K. L. **Van Buren**, F. M. **Hemez** et S. **Atamturktur**: Simulating the dynamics of wind turbine blades: part i, model development and verification. *Wind Energy*, 16(5):694–710, 2013. (cité p. 18)

- [96] R. E. **Moore**, R. B. **Kearfott** et M. J. **Cloud** : *Introduction to interval analysis*. Siam, 2009. (cité p. 24)
- [97] R.E. **Moore** : *Interval Analysis*. Prentice-Hall, 1966. (cité p. 24)
- [98] R.E. **Moore** : *Methods and Applications of Interval Analysis*. SIAM Studies in Applied and Numerical Mathematics, 1979. (cité p. 24)
- [99] M. D. **Morris** : Factorial sampling plans for preliminary computational experiments. *Technometrics*, 33(2):161–174, 1991. (cité p. 119 et 165)
- [100] J.E. **Mottershead** et M.I. **Friswell** : Model updating in structural dynamics: a survey. *Journal of Sound and Vibration*, 167(2):347–375, 1993. (cité p. 19, 65 et 82)
- [101] **MSC.Software** : *MD.Nastran R3 Quick reference guide*. 2008. (cité p. 96)
- [102] R.H. **Myers** et D.C. **Montgomery** : *Response Surface Methodology*. Wiley, New York, 2002. (cité p. 102 et 121)
- [103] I. J. **Myung** : The importance of complexity in model selection. *Journal of Mathematical Psychology*, 44(1):190–204, 2000. (cité p. 82 et 139)
- [104] F. **Neelamkavil** : *Computer simulation and modelling*. John Wiley & Sons, Inc., 1987. (cité p. 16)
- [105] R. B. **Nelson** : Simplified calculation of eigenvector derivatives. *AIAA journal*, 14(9): 1201–1205, 1976. (cité p. 105)
- [106] W. L. **Oberkampf** et C. J. **Roy** : *Verification and validation in scientific computing*. Cambridge University Press, 2010. (cité p. 18)
- [107] W. L. **Oberkampf**, T. G. **Trucano** et C. **Hirsch** : Verification, validation, and predictive capability in computational engineering and physics. *Applied Mechanics Reviews*, 57(5):345–384, 2004. (cité p. 18)
- [108] W.L. **Oberkampf**, S.M. **DeLand**, B.M. **Rutherford**, K.V. **Diegert** et K.F. **Alvin** : Error and uncertainty in modelling and simulation. *Reliability Engineering and System Safety*, 75:333–357, 2002. (cité p. 20 et 21)
- [109] J. C. **O’Callahan** et P. **Li** : A non smoothing serep process for modal expansion. *In Proceedings-spie the international society for optical engineering*, pages 232–232. Spie International Society for Optical, 1994. (cité p. 66)
- [110] J.C. **O’Callahan** : A procedure for an improved reduced system (irs) model. *Proceedings of the 7th International Modal Analysis Conference*, pages 17–21, 1989. (cité p. 67)
- [111] J.C. **O’Callahan**, P. **Avitabile** et R. **Riemer** : System equivalent reduction expansion process (serep). *In Proceedings of IMAC VII*, pages 29–37, 1989. (cité p. 66)
- [112] C.H. **Papadimitriou** : The np-completeness of the bandwidth minimization problem. *Computing*, 16(3):263–270, 1976. (cité p. 95)

- [113] A.T. **Patera** et G. **Rozza** : *Reduced Basis Approximation and A Posteriori Error Estimation for Parametrized Partial Differential Equations*. Version 1.0, Copyright MIT 2006, to appear in (tentative rubric) MIT Pappalardo Graduate Monographs in Mechanical Engineering, 2006. (cité p. 107)
- [114] D. **Pereiro**, S. **Cogan**, E. **Sadoulet-Reboul** et F. **Martinez** : Robust model calibration with load uncertainties. In *Topics in Model Validation and Uncertainty Quantification, Volume 5, Conference Proceedings of the Society for Experimental Mechanics Series 41*, pages 89–97. Springer, 2013. (cité p. 28, 82, 84, 114 et 117)
- [115] L. **Pichler**, H. J. **Pradlwarter** et G. I. **Schuëller** : A mode-based meta-model for the frequency response functions of uncertain structural systems, 2008. (cité p. 38)
- [116] E. **Pillet** : *Méthodologies d'aide à la décision en conception robuste*. Thèse de doctorat, Université de Franche-Comté, 2008. (cité p. xiii, 87, 103, 118, 121, 129 et 166)
- [117] E. **Pillet**, S. **Cogan**, F. **Buffe** et M. **Guedri** : Conception robuste d'une structure spatiale en présence de méconnaissances de modèle. Insitut Femto-st / CNES. (cité p. 29 et 102)
- [118] G. **Puel** : *Sur une théorie des méconnaissances en dynamique des structures*. Thèse de doctorat, École Normale Supérieure de Cachan, 2004. (cité p. 23 et 26)
- [119] G. **Puel** : Problèmes d'identification paramétrique : vers une approche multiéchelles. Habilitation à diriger des recherches - École Normale Supérieure de Cachan, 2013. (cité p. 72)
- [120] N. **Rabhi**, M. **Guedri**, H. **Hassis** et N. **Bouhaddi** : Structure dynamic reliability: A hybrid approach and robust meta-models. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 25(7): 2313–2323, 2011. (cité p. 23)
- [121] S. **Rao** et J. **Sawyer** : Fuzzy finite element approach for the analysis of imprecisely defined system. *AIAA Journal*, 33(12):2364–2370, 1995. (cité p. 25)
- [122] M. **Reynier** : *Sur le contrôle de modélisations par éléments finis: recalage à partir d'essais dynamique*. Thèse de doctorat, Université de Paris VI, 1990. (cité p. 69 et 72)
- [123] P. J. **Roache** : *Verification and validation in computational science and engineering*. Hermosa Albuquerque, NM, 1998. (cité p. 18)
- [124] N. **Roussouly**, F. **Petitjean** et M. **Salaun** : A new adaptive response surface method for reliability analysis. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 32:103–115, 2013. (cité p. 23)
- [125] W. D. **Rowe** : Understanding uncertainty. *Risk Analysis*, 14:743–750, 1994. (cité p. 20)
- [126] B. **Roy** : Robustness in operational research and decision aiding: A multi-faceted issue. *European Journal of Operational Research*, 200(3):629 – 638, 2010. (cité p. 9 et 36)
- [127] Y. **Saad** : *Iterative methods for sparse linear systems*. Siam, 2003. (cité p. 96)
- [128] J. **Sacks**, S. B. **Schiller** et W. J. **Welch** : Design for computer experiments. *Technometrics*, 31(1):41–47, 1989. (cité p. 102)

- [129] G. I. **Schuëller** : Developments in stochastic structural mechanics. *Archive of Applied Mechanics*, 75:755–773, 2006. (cité p. 22 et 23)
- [130] G. **Shafer** : *A mathematical theory of evidence*, volume 1. Princeton university press Princeton, 1976. (cité p. 26)
- [131] C. E. **Shannon** : A mathematical theory of communication. *Bell System Technical Journal*, 27:379–423, 1948. (cité p. 22)
- [132] P. L. **Shields** : Evaluating the predictive capability of numerical models considering robustness to non-probabilistic uncertainty in the input parameters. Mémoire de D.E.A., Clemson University, 2013. (cité p. 19)
- [133] H. A. **Simon** : *Models of man*. 1957. (cité p. 27)
- [134] C. **Soize** : A nonparametric model of random uncertainties for reduced matrix models in structural dynamics. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 15(3):277–294, 2000. (cité p. 21 et 22)
- [135] C. **Soize** : A comprehensive overview of a non-parametric probabilistic approach of model uncertainties for predictive models in structural dynamics. *Journal of Sound and Vibration*, 288:623–652, 2005. (cité p. 22 et 82)
- [136] C. **Soize** : Stochastic modeling of uncertainties in computational structural dynamics - recent theoretical advances. *Journal of Sound and Vibration*, 2011. (cité p. 22 et 23)
- [137] D. C. **Sorensen** : Implicit applications of polynomial filters in a k-step arnoldi method. *SIAM Journal Matrix Analysis Applications*, 13:357:385, 1992. (cité p. 10)
- [138] B. **Sudret** : Uncertainty propagation and sensitivity analysis in mechanical models. contribution to structural reliability and stochastic spectral methods. Mémoire HDR - Université Blaise Pascal - Clermont II, 2007, 2007. (cité p. 23)
- [139] B. **Sudret** et A. Der **Kiureghian** : Stochastic finite element methods and reliability. Rapport technique, University of California, Berkeley, 2000. (cité p. 23)
- [140] L. P. **Swiler**, T. L. **Paez** et R. L. **Mayes** : Epistemic uncertainty quantification tutorial. 2009. (cité p. 26)
- [141] A. **Tarantola** : *Inverse problem theory*. SIAM, 2005. (cité p. 74)
- [142] B. H. **Thacker**, S. W. **Doebling**, F. M. **Hemez**, M. C. **Anderson**, J. E. **Pepin** et E. A. **Rodriguez** : Concepts of model verification and validation. Rapport technique, Los Alamos National Lab., Los Alamos, NM (US), 2004. (cité p. 18)
- [143] A. N. **Tikhonov** et V. Y. **Arsenin** : *Solutions of ill-posed problems*. Winston Wiley & Sons, 1977. (cité p. 46 et 74)
- [144] K. L. **Van Buren**, S. **Atamturktur** et F. M. **Hemez** : Model selection through robustness and fidelity criteria: Modeling the dynamics of the cx-100 wind turbine blade. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 43(1):246–259, 2014. (cité p. 18, 28, 82, 114 et 117)

- [145] K. L. **Van Buren**, M. G. **Mollineaux**, F. M. **Hemez** et S. **Atamturktur** : Simulating the dynamics of wind turbine blades: part ii, model validation and uncertainty quantification. *Wind Energy*, 16(5):741–758, 2013. (cité p. 18 et 84)
- [146] P. **Vinot** : *Robustesse des modèles et optimisation à partir de modèles condensés ou simplifiés*. Thèse de doctorat, Université de Franche-Comté, 2001. (cité p. 36 et 43)
- [147] P. **Vinot**, S. **Cogan** et Y. **Ben-Haim** : Reliability of structural dynamic models based on info-gap models. In *Proceedings of the 20th International Modal Analysis Conference (IMAC-XX)*, pages 1057–1063, 2002. (cité p. 90)
- [148] P. **Vinot**, S. **Cogan** et V. **Cipolla** : A robust model-based test planning procedure. *Journal of Sound and Vibration*, 288(3):571–585, 2005. (cité p. 28 et 76)
- [149] P. **Vinot**, S. **Cogan** et G. **Lallement** : Approche non-probabiliste de fiabilité basée sur les modèles convexes. *Mécanique et Industries*, 4:45–50, 2003. (cité p. 155)
- [150] T. **Weisser** : *Caracterisation dynamique et conception robuste d'interfaces de structures*. Thèse de doctorat, Université de Franche-Comté, 2012. (cité p. 108)
- [151] E. J. **Williams** et J. S. **Green** : A spatial curve fitting technique for estimating rotational degrees of freedom. In *International Modal Analysis Conference, 8 th, Kissimmee, FL*, pages 376–381, 1990. (cité p. 66)
- [152] K. **Worden**, G. **Manson**, T.M. **Lord** et M.I. **Friswell** : Some thoughts on uncertainty quantification and propagation. In *Proceedings of IMAC XXI*, 2003. (cité p. 24 et 135)
- [153] M.S.Y. **Yusoff** et M. **Corus** : Faisabilité du calcul de réponses en fonctionnement d'un alternateur à partir de données expérimentales. Rapport technique CR-AMA-10.349, EDF R&D, 2010. (cité p. 11)
- [154] L. A. **Zadeh** : Fuzzy sets. *Information and control*, 8:338–353, 1965. (cité p. 25)
- [155] O. C. **Zienkiewicz** : *The Finite Element Method in Engineering Science*. McGraw-Hill Publishing Company Limited, 1971. (cité p. 8)

---

---

# Liste des communications

## Conférences internationales avec actes

1. A. **Kuczkowiak**, S. **Cogan**, M. **Ouisse**, E. **Foltête** and M. **Corus** : A Maintenance Alarm for Alternators based on eigensolutions, *in Proceedings of the CMMNO2012*, Hammamet, Tunisie, 2012.
2. A. **Kuczkowiak**, S. **Cogan**, M. **Ouisse**, E. **Foltête** and M. **Corus** : A Maintenance Alarm for Alternators based on eigensolutions, *in Proceedings of the ISMA2012*, Leuven, Belgique, 2012.
3. A. **Kuczkowiak**, S. **Cogan**, M. **Ouisse**, E. **Foltête** and M. **Corus** : Robust Expansion of Experimental Mode Shapes Under Epistemic Uncertainties, *in Model Validation and Uncertainty Quantification, Volume 3*, pages 419–427, Springer, 2014.

## Conférences nationales sans actes

4. A. **Kuczkowiak**, S. **Cogan**, M. **Ouisse**, E. **Foltête** and M. **Corus** : Analyse de robustesse des réponses en fonctionnement à partir de solutions propres incertaines, *JJCAB 2011*, Nevers, France, 2011.
5. A. **Kuczkowiak**, S. **Cogan**, M. **Ouisse**, E. **Foltête** and M. **Corus** : Robust expansion of experimental mode shapes under epistemic uncertainties, *VISHNO 2014*, Aix-en-Provence, France, 2014.



---

## Calcul pratique des courbes de robustesse

Comme l'équation (2.17) de la section 2.3.4 le suggère et dans le cas où l'obtention de solution analytique est impossible, réaliser une analyse de robustesse par une approche info-gap implique de résoudre deux problèmes d'optimisation imbriqués l'un dans l'autre. On va détailler, ici, quels sont les différentes approches pour résoudre l'équation (2.17). On suppose, dans cette annexe, que l'on dispose des éléments définis dans la section 2.3.4, à savoir :

- un vecteur regroupant les paramètres incertains  $\mathbf{u}$  et contraint à appartenir au modèle d'incertitude info-gap  $\mathcal{U}(\alpha, \mathbf{u}^0)$  avec  $\alpha \geq 0$  ;
- le modèle du système noté  $\mathcal{M}(\mathbf{q}, \mathbf{u}) = y$  ;
- le modèle de prise de décision  $y \leq y^c$ .

### A.1 Résolution pratique

Une première possibilité, décrite dans [149], est de partir d'un  $\alpha$  empirique puis en combinant interpolations et optimisations, on aboutit itérativement au  $y^c$  et au  $\hat{\alpha}(\mathbf{q}, y^c)$  désiré. Cependant, cette approche est très coûteuse et ne sera pas décrite ici. Comme cela a pu être indiqué dans la section 2.3.4, on fixe le critère de performance  $y^c$  et on calcul la valeur de la robustesse correspondante  $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}(\mathbf{q}, y^c)$ . En pratique, ce n'est pas  $y^c$  que l'on fixe mais  $\hat{\alpha}$ .

On désire obtenir la courbe de robustesse dans l'intervalle  $\mathcal{J} = [0; \hat{\alpha}_{\max}]$ .

- La première étape consiste à discrétiser l'intervalle  $\mathcal{J}$  en un sous-ensemble de dimension  $r$  :

$$\mathcal{J} \approx \{0, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \hat{\alpha}_{\max}\}. \quad (\text{A.1})$$

- La deuxième étape consiste à résoudre un problème d'optimisation sous contrainte pour chaque  $\hat{\alpha}_i \in \mathcal{J}$  :

$$y^c(\hat{\alpha}_i) = \max_{x \in \mathcal{U}(\hat{\alpha}_i, \mathbf{u}^0)} \mathcal{M}(\mathbf{q}, \mathbf{u}). \quad (\text{A.2})$$

La courbe de robustesse est alors obtenue en traçant la robustesse discrétisée  $\hat{\alpha}_i$  en fonction de la valeur de performance  $y^c(\hat{\alpha}_i)$  correspondante. On va illustrer, à la section A.2, sur un système dont on dispose de la fonction de robustesse analytique que résoudre l'équation (2.17) est équivalent à suivre cette approche.

Résoudre le problème d'optimisation formulé à l'équation (A.2) pose naturellement des problèmes lorsque la fonction  $\mathcal{M}(\mathbf{q}, \mathbf{u})$  est fortement multimodale (elles possèdent alors plusieurs optimaux locaux). Un point donc très important mais particulièrement difficile lorsque le nombre de paramètres incertains est important est la vérification de la résolution du problème d'optimisation (A.2).

## A.2 Résolution théorique et pratique : illustration de l'équivalence

Pour illustrer l'équivalence entre résoudre le problème d'optimisation formulée dans l'équation (2.17) (que l'on qualifera de résolution théorique) et obtenir la robustesse par la résolution de plusieurs problèmes d'optimisation sous contraintes (que l'on qualifera de résolution pratique), on considère le système à 1 ddl suivant dont le modèle est

$$f = u \times x^3, \quad (\text{A.3})$$

avec  $f = 1 \text{ N}$  une force et  $u$  une raideur considérée comme incertaine et dont la valeur initiale est  $u^0 = 1000 \text{ N.m}^{-3}$ . Le modèle d'incertitude info-gap choisi est le modèle d'erreur relative. Ainsi, on a

$$u \in \mathcal{U}(\alpha, u^0) = \left\{ u : \left| \frac{u - u^0}{u^0} \right| \leq \alpha \right\}, \quad (\text{A.4})$$

avec  $\alpha \geq 0$ , l'horizon d'incertitude qui est inconnu. Le système est considéré comme non défaillant si le déplacement  $x$  n'excède pas une valeur limite  $x^c$ . Le modèle de prise de décision est donc

$$x \leq x^c. \quad (\text{A.5})$$

Dans ces conditions, la fonction robustesse s'exprime par

$$\hat{\alpha}(x^c) = \max \left\{ \alpha : \left( \max_{u \in \mathcal{U}(\alpha, u^0)} x \right) \leq x^c \right\} \in \mathbb{R}_+^*. \quad (\text{A.6})$$

Soit  $\alpha \geq 0$ , un horizon d'incertitude donné, le maximum du déplacement est

$$\max_{u \in \mathcal{U}(\alpha, u^0)} x = \max_{u \in \mathcal{U}(\alpha, u^0)} \sqrt[3]{\frac{f}{u}} = \max \left\{ \sqrt[3]{\frac{f}{(1-\alpha)u^0}}; \sqrt[3]{\frac{f}{(1+\alpha)u^0}} \right\}. \quad (\text{A.7})$$

Comme  $u^0 \geq 0$  et  $f \geq 0$ , on a

$$\max_{u \in \mathcal{U}(\alpha, u^0)} x = \sqrt[3]{\frac{f}{(1-\alpha)u^0}}. \quad (\text{A.8})$$

Soit  $x^c > 0$ , une amplitude de déplacement critique, alors il existe  $\hat{\alpha} \geq 0$ , tel que

$$x^c = \max_{u \in \mathcal{U}(\hat{\alpha}, u^0)} x = \sqrt[3]{\frac{f}{(1-\hat{\alpha})u^0}}, \quad (\text{A.9})$$

ce qui peut se réécrire de manière à obtenir l'expression théorique de la fonction robustesse en fonction de  $x^c$  :

$$\hat{\alpha}(x^c) = 1 - \frac{f}{u^0 \times (x^c)^3}. \quad (\text{A.10})$$

La figure A.1 présente trois courbes de robustesse. La courbe de robustesse en noire représente la relation exacte de la fonction robustesse (A.10). La courbe en rouge (resp. en bleu) représente la courbe de robustesse lorsque  $r = 100$  (resp.  $r = 4$ ) et  $\hat{\alpha}_{\max} = 0.8$ . Cette figure nous indique donc, que si on discrétise assez finement l'horizon d'incertitude, alors il est possible de retrouver la valeur exacte de la fonction robustesse. *A contrario*, une discrétisation trop grossière - ou sous-échantillonnage - peut conduire à une approximation erronée de la valeur exacte de la fonction robustesse. Néanmoins, si on utilise un polynôme lissé de degré 2 ou 3, l'erreur d'approximation peut être diminuée de façon importante.

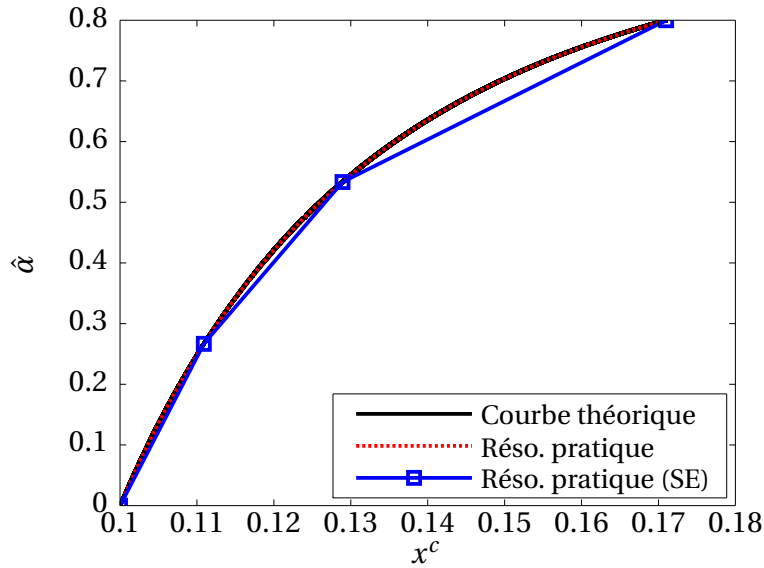


FIG. A.1: Confrontation courbes de robustesse théorique / courbes de robustesse obtenues par optimisation (résolution pratique)

La fonction robustesse présente ici un caractère particulier : elle est strictement concave.

Dans ce cas particulier et si l'on sous-échantillonne l'horizon d'incertitude ( $r$  est alors trop bas), alors la fonction robustesse que l'on obtient sous-évalue la robustesse réelle. Dans le même état d'esprit, si la fonction robustesse réelle est strictement convexe, alors on sur-évalue la robustesse réelle.

### A.3 Calcul des courbes de robustesse dans le chapitre 3

La résolution du problème d'optimisation est faite, ici, en tirant parti des phénomènes physiques, la résonance d'amplitude, intégré dans la fonction coût. Cette approche est utilisée dans le chapitre 3 pour calculer rapidement et efficacement les courbes de robustesse. Le problème d'optimisation que l'on cherche à résoudre est

$$\hat{\alpha}(\mathbf{q}, y^c) = \max \left\{ \alpha : \left( \max_{\mathbf{x} \in \mathcal{U}(\hat{\alpha}, \mathbf{x}^0)} \mathcal{M}(\mathbf{q}, \mathbf{x}) \right) \leq y^c \right\} \in \mathbb{R}_+. \quad (\text{A.11})$$

avec  $\mathbf{x}$  défini à l'équation (3.1). On résout ce problème avec la résolution pratique défini en section A.1. Soit  $\hat{\alpha}_i \in \mathbb{R}_+^*$ , une robustesse discrétisée, on cherche à résoudre le problème

$$y^c(\hat{\alpha}_i) = \max_{\mathbf{x} \in \mathcal{U}(\hat{\alpha}_i, \mathbf{x}^0)} \mathcal{M}(\mathbf{q}, \mathbf{x}). \quad (\text{A.12})$$

En remplaçant la fonction  $\mathcal{M}(\mathbf{q}, \mathbf{x})$  par sa valeur (cf. équations (3.4) et (3.3)), on doit résoudre

$$y^c(\hat{\alpha}_i) = \max_{\mathbf{x} \in \mathcal{U}(\hat{\alpha}_i, \mathbf{x}^0)} \left\{ \max_{\omega \in \Omega} \left\| \sum_{v=1}^m \frac{\boldsymbol{\phi}_v \boldsymbol{\phi}_v^T \mathbf{f}}{-\omega_0^2 + 2j\xi_v \omega_0 \omega_v + \omega_v^2} \right\|_{\infty} \right\}, \quad (\text{A.13})$$

dans lequel  $\omega_v = \omega_v(\mathbf{x})$ ,  $\xi_v = \xi_v(\mathbf{x})$  et  $\boldsymbol{\phi}_v = \boldsymbol{\phi}_v(\mathbf{x})$ . Ces dépendances en  $\mathbf{x}$  sont omises dans la suite dans un souci de clarté. On sait que le maximum de l'amplitude de la réponse sur la bande fréquentielle  $\Omega$  est obtenu à la résonance d'amplitude  $\omega_v^a$  dont la valeur est

$$\omega_v^a = \omega_v \sqrt{1 - \xi_v^2}. \quad (\text{A.14})$$

Les résonances d'amplitude, pour chaque mode, sont regroupées dans le sous-ensemble  $\Omega_a$  défini par

$$\Omega_a = \{\omega_1^a, \dots, \omega_v^a, \dots, \omega_m^a\}. \quad (\text{A.15})$$

Au lieu de balayer  $\Omega$ , on évalue, pour chaque mode, le niveau d'amplitude de la réponse. Il est peu probable que cette étape introduise des erreurs car les maximums des réponses sont toujours obtenus aux résonances.

Concernant la seconde boucle d'optimisation, le sous-espace  $\mathcal{U}(\hat{\alpha}_i, \mathbf{x}^0)$  n'est également pas complètement balayé : on évalue seulement la réponse aux bornes de  $\mathcal{U}(\hat{\alpha}_i, \mathbf{x}^0)$ . Il est possible, ici, que cette étape introduise des erreurs : pour un  $\hat{\alpha}_i$  donné, il est possible que le

pire-cas se situe à l'intérieur du sous-espace. Une manière de vérifier le bon déroulement du calcul est d'observer la croissance de la courbe de robustesse (cf. section 2.3.4) : une courbe non croissante indique un problème dans la résolution du problème d'optimisation. D'autre part, on peut effectuer en parallèle des tests à l'intérieur de l'intervalle pour améliorer la vérification.

Cette démarche, que l'on peut qualifier d'heuristique, permet d'évaluer rapidement la courbe de robustesse dans les cas où le modèle du système est le calcul de la réponse par projection sur base modale et où les méconnaissances sont portées par les solutions propres.

---

## Identification modale de panneaux solaires

Dans cette annexe, on présente la démarche d'identification suivie pour obtenir les solutions propres dans la section 3.3.1 du chapitre 3. On restreint la présentation à l'identification d'une configuration, la démarche suivie pour les autres étant exactement la même.

### B.1 Démarche d'identification

L'identification, pour chaque mesure, a été réalisée en deux temps. Dans un premier temps, l'identification du modèle pôles/résidus a été réalisée par la méthode LSCF (*Least Square Complex Frequency*, équivalent à la méthode PolyMax de LMS [54]) disponible dans Modan<sup>©1</sup>.

$$\text{FRF}_{ij}^{id} = \sum_{k=1}^N \frac{R_k^{ij}}{s - \lambda_k} + \frac{R_k^{ij*}}{s - \lambda_k^*} \in \mathbb{C}, \quad (\text{B.1})$$

avec :

- $s = j\omega$  : la variable de Laplace ( $j^2 = -1$ ) ;
- $N$  : le nombre de pôles identifiés ;
- $\lambda_k = -\xi_k \omega_k + j\omega_k \sqrt{1 - \xi_k^2} \in \mathbb{C}$  : le pôle du mode  $k$  identifié constitué du taux d'amortissement modal  $\xi_k$  et de la pulsation propre  $\omega_k$  et dans lequel l'hypothèse de Basile est supposée valide ;
- $R_k^{ij} \in \mathbb{C}$  : le résidu identifié associé au mode  $k$  entre les entrée/sortie  $(i, j)$ . Le mode complexe  $\boldsymbol{\psi}_k$  dérive de la matrice des résidus  $\mathbf{R}_k$  par :  $\mathbf{R}_k = \boldsymbol{\psi}_k (\boldsymbol{\psi}_k^* \mathbf{f})$  où  $(\boldsymbol{\psi}_k^* \mathbf{f})$  représente le facteur modal et  $\mathbf{f}$  représente le vecteur d'excitation.

---

1. Plateforme logicielle dédiée à l'identification modale des structures développée par le département de Mécanique Appliquée de l'institut FEMTO-ST



Dans un second temps, on doit transformer le modèle pôles/résidus en un modèle de modes normaux (équation (B.2)), la structure ne justifiant pas d'étude dans l'espace complexe (ce qui est confirmé sur la figure B.2 représentant le bouquet de phase du mode complexe 1  $\psi_1$  obtenu dans le plan de Nyquist car les dds vibrent en phase).

$$\text{FRF}_{ij}^{mn} = \sum_{k=1}^N \frac{\phi_i^k \phi_j^k}{s^2 + 2\xi_k \omega_k s + \omega_k^2} \in \mathbb{C}. \quad (\text{B.2})$$

La relation entre les modes réels et complexes dépend de la procédure de normalisation des modes complexes. Ici, les modes complexes, après identification, suivent la norme 1, ce qui conduit à la relation suivante entre modes réels et complexes

$$\phi_k = \frac{\psi_k}{\sqrt{2j}\lambda_k}. \quad (\text{B.3})$$

Les fonctions de réponse en fréquences (FRF), avant identification, présentent un très bon ratio signal sur bruit comme indiqué sur la figure B.1. La validation de l'identification des

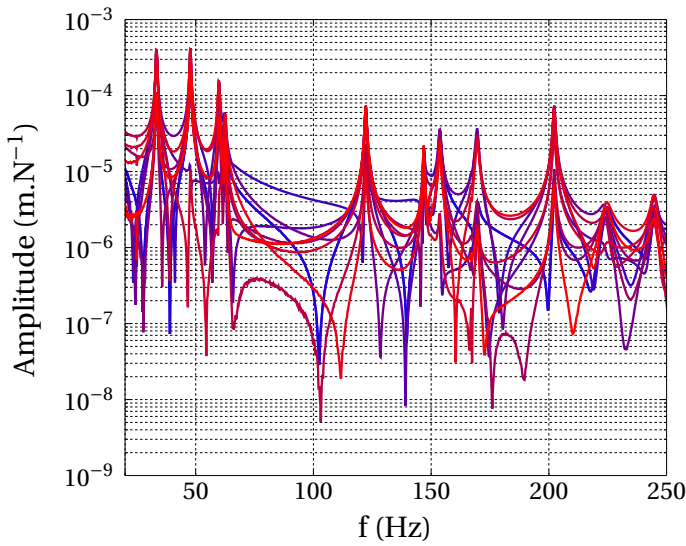
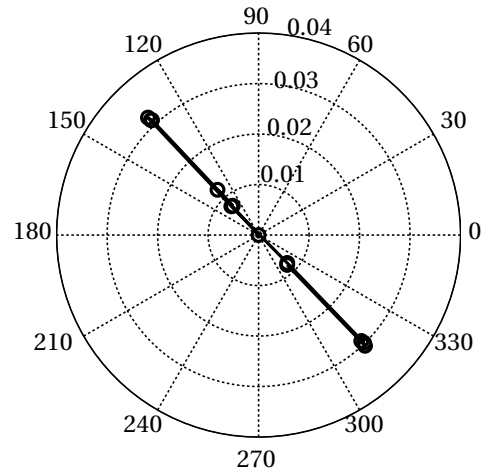


FIG. B.1: FRFs mesurées

FIG. B.2:  $\psi_1$  dans le plan de Nyquist

modèles pôles/résidus et modes normaux est basée sur la superposition des synthèses des FRFs : on construit les FRFs synthétisées sur la base des modes complexes et normaux et on vérifie dans quelle mesure ces FRFs se superposent avec les FRFs mesurées. Cependant, cette approche demande d'avoir à disposition des modes normaux normalisés avec une masse généralisée unitaire.

Dans le cas où elle est disponible, on utilise la FRF ponctuelle (c'est à dire la FRF où le ddl

d'excitation est le même que le ddl d'observation) pour effectuer cette normalisation. Soit  $\mu_k$  la masse modale identifiée du mode  $k$  définie par

$$\mu_k = \frac{(\phi_k^i)^2}{2\omega_k \text{Im}(R_k^{ii})}, \quad (\text{B.4})$$

alors les modes normaux normalisés  $\bar{\phi}_v$  avec une masse modale unitaire sont obtenus par

$$\bar{\phi}_v = \frac{\phi_v}{\sqrt{\mu_v}}. \quad (\text{B.5})$$

## B.2 Validation de l'identification

Comme indiqué précédemment, la qualité de l'identification est évaluée en superposant les FRFs mesurées, les FRFs synthétisées sur la base des modes normaux normalisés et complexes (figure B.3). Les FRFs se superposent correctement, on peut donc valider l'identification. On note également qu'il est possible d'utiliser des métriques - comme le FRAC - afin de déterminer quantitativement le degré de superposition entre deux FRFs.

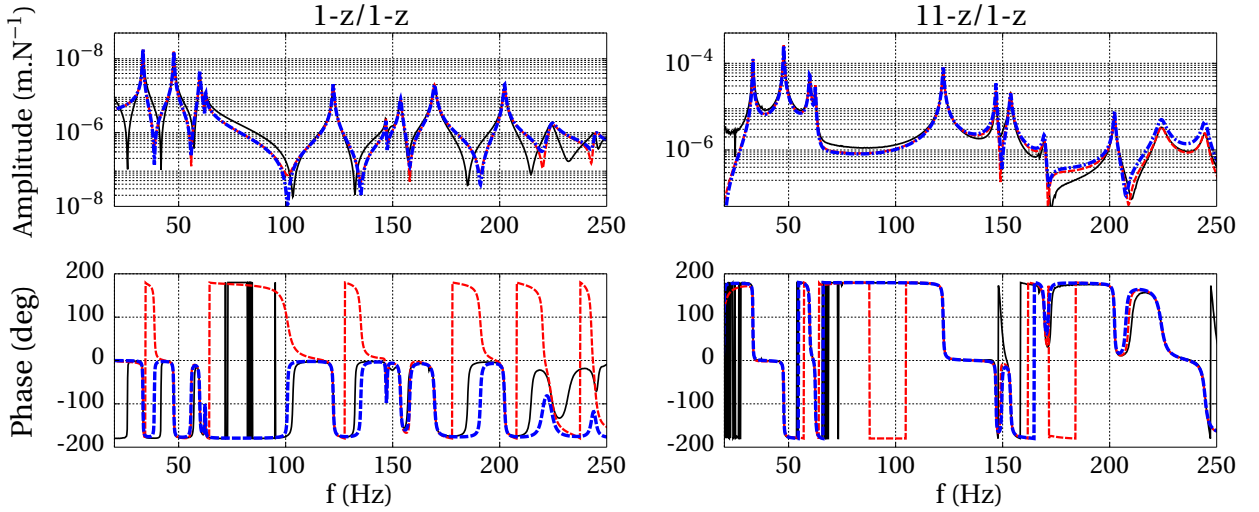


FIG. B.3: Validation de l'identification modale - FRFs mesurées (-), pôles/résidus (- -), modes normaux normalisés (- -).

---

## Analyse de sensibilité par la méthode de Morris

Soit  $\mathbf{x} = [x_1; \dots; x_n]^T \in \mathcal{H}$  le vecteur regroupant les  $n$  paramètres candidats,  $\mathcal{H}$  regroupant l'espace de variation des paramètres. Une distribution uniforme est associée à chaque paramètre. La relation exacte entre la réponse  $y$  et les paramètres d'entrées est  $y = f(\mathbf{x})$ .

La méthode de Morris [99] permet de classer les paramètres - aussi appelés facteurs - en trois groupes, selon que leurs effets soient :

- (a) négligeables ;
- (b) linéaires et sans interactions avec d'autres facteurs ;
- (c) non-linéaires ou avec interactions.

L'espace  $\mathcal{H}$  est tout d'abord discrétisé régulièrement en  $n_l$  niveaux. Une transformation est effectuée afin que les paramètres soient uniformément distribués sur  $[0; 1]$ . Soit  $\mathbf{x}^i$  un échantillon de l'espace  $\mathcal{H} \in \mathbb{R}^{n \times n_l}$ , l'effet élémentaire du paramètre  $x_k$  est évalué par

$$EE_k^i = \frac{f(\mathbf{x}^i \pm \Delta \mathbf{e}_k) - f(\mathbf{x}^i)}{\pm \Delta}, \quad (\text{C.1})$$

où  $\mathbf{e}_k$  est un vecteur unitaire dont toutes les composantes sont nulles exceptée la  $k$  ième.  $\Delta$  est une valeur choisie parmi  $1/(n_l - 1) \dots 1/(n_l - 1)$ . Il est conseillé de prendre un nombre pair pour le nombre de niveau  $n_l$  et de choisir  $\Delta$  égal à  $n_l/(2n_l - 2)$  [30, 99].  $r$  échantillonnage - ou expérience - sont réalisés, permettant de construire  $r$  trajectoires de  $(n + 1)$  points. Pour un échantillon  $\mathbf{x}^i$ , la trajectoire est construite à partir d'une matrice d'orientation  $\mathbf{O} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times n}$  donnée par

$$\mathbf{O} = \mathbf{X}^{\text{rep}} + \frac{\Delta}{2} ((2\mathbf{B} - \mathbf{J})\mathbf{D} + \mathbf{J}), \quad (\text{C.2})$$

avec  $\mathbf{X}^{\text{rep}}$  une matrice dont chaque ligne est  $\mathbf{x}^i$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times n}$  est une matrice strictement triangulaire inférieure constituée de 1,  $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times n}$  est une matrice constituée de 1 uniquement

et enfin  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times n}$  est une matrice diagonale dont les éléments ont une probabilité égale de prendre la valeur +1 ou -1.

La matrice  $\mathbf{O}$  fournit alors les trajectoires à suivre : on suit, dans l'ordre, les valeurs relevées sur les lignes de  $\mathbf{O}$ . On note que, dans la matrice  $\mathbf{O}$  obtenue, chaque colonne d'indice  $j$  possède deux lignes ne différant que pour la  $j$  ième composante. Généralement, quatre à dix trajectoires sont construites. Tirée de [116], la figure C.1 représente l'exemple de trois trajectoires obtenues pour trois facteurs et quatre niveaux.

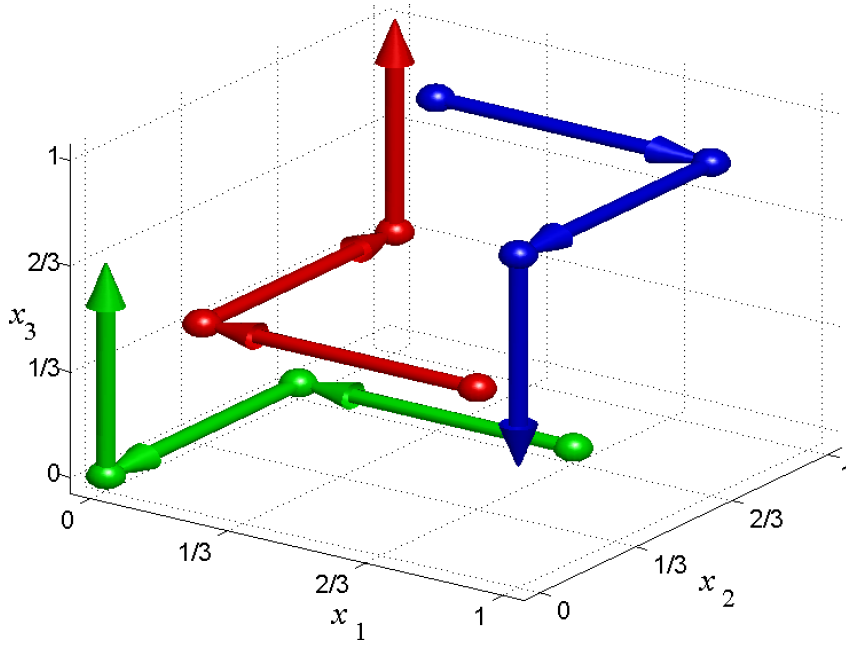


FIG. C.1: Trajectoires associées à la méthode de Morris - tirée de [116]

Comme  $n = 3$ ,  $n_l = 4$ ,  $\Delta = n_l / (2n_l - 2) = 2/3$ , alors les paramètres doivent prendre des valeurs discrètes parmi  $\{0; 1/3; 2/3; 1\}$ , pour que  $\mathbf{x}^i$  soit toujours dans  $\mathcal{H}$ , les valeurs initiales des paramètres sont choisies aléatoirement parmi  $\{0; 1/3\}$ . Considérons par exemple la trajectoire apparaissant en rouge sur la figure C.1. Pour ce chemin,  $\mathbf{x}^i = [0; 1/3; 1/3]$  a été tiré et nous obtenons donc les matrices

$$\mathbf{X}^{\text{rep}} = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{C.3})$$

La matrice de permutation est calculée suivant l'équation (C.2) et a pour valeur

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{C.4})$$

Les effets élémentaires sont évalués par

$$\begin{aligned} \text{EE}_1^i &= \frac{f(2/3, 1/3, 1/3) - f(0, 1/3, 1/3)}{\Delta} \\ \text{EE}_2^i &= \frac{f(0, 1, 1/3) - f(0, 1/3, 1/3)}{\Delta} \\ \text{EE}_3^i &= \frac{f(0, 1, 1) - f(0, 1, 1/3)}{\Delta}. \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

$r$  trajectoires étant construites, l'analyse de sensibilité par la méthode de Morris conduit à  $r(n+1)$  évaluations de la fonction d'intérêt.

Pour chaque paramètre  $x_k$ , les mesures de sensibilité de la méthode de Morris sont la moyenne  $\mu_k^M = E(\text{EE}_k)$  et l'écart-type  $\sigma_k^M = \sigma(\text{EE}_k)$  des  $r$  indices  $\text{EE}_k^i$ . La mesure de sensibilité proprement dite est donnée par  $\mu_k^M$ , une forte valeur absolue indiquant un facteur dont l'influence sur la réponse est importante sous toutes ses formes et une faible valeur absolue indiquant le contraire. « Sous toutes ses formes » signifie que cette mesure ne permet pas de distinguer si la sensibilité est due au paramètre seul ou à l'interaction de celui-ci avec les autres paramètres. Si l'indice  $\|\mu_k^M\|$  est haut et  $\sigma_k^M$  est faible alors le paramètre influe linéairement et additivement sur la réponse, c'est-à-dire que son effet s'ajoute à ceux des autres paramètres de façon homogène sur son intervalle de variation. Si les indices  $\|\mu_k^M\|$  et  $\sigma_k^M$  sont forts alors le paramètre influe non-linéairement ou par ses interactions avec les autres facteurs. Néanmoins, comme les effets élémentaires peuvent prendre des valeurs positives ou négatives, des variables influentes peuvent conduire à des valeurs  $\mu_k^M$  faibles. Lorsque le modèle possède plusieurs réponses, il est exclu pour la même raison de réaliser une moyenne globale sur l'ensemble des effets élémentaires de toutes les réponses. Pour y remédier, il est proposé dans [30] de compléter l'analyse en calculant un indice  $\mu_k^{M*} = E(\|(\text{EE})_k\|)$ , moyenne de la valeur absolue des effets élémentaires.

## Résumé :

Le comportement dynamique de structures complexes, comme les alternateurs, doit être maîtrisé afin d'en garantir un fonctionnement fiable. Cependant, la modélisation comporte de nombreuses incertitudes rendant délicates la prédiction du comportement vibratoire. Ces travaux de recherche ont pour objectif de fournir des outils d'aide à la décision afin de faciliter la prise de décision rapide suite au redémarrage d'alternateurs. Basé sur la théorie info-gap, un premier outil d'aide à la décision est proposé : il a pour objectif d'évaluer la robustesse de réponses dynamiques vis-à-vis d'un modèle modal incertain. Nous avons également étudié comment de l'information nouvelle peut être intégrée au modèle d'incertitude pour améliorer sa représentativité à la réalité. Une expansion par l'erreur en relation de comportement étendue de modes propres identifiés permet ensuite d'enrichir la représentativité du modèle numérique fournissant ainsi un modèle qualifié d'hybride et permettant d'évaluer les niveaux de réponse. Comme la modélisation comporte de nombreuses méconnaissances, nous avons proposé le procédé d'expansion robuste dont l'objectif est d'obtenir des vecteurs étendus robustes. En présence de méconnaissances sévères, nous montrons enfin qu'il est préférable de calibrer un modèle en maximisant la robustesse vis-à-vis des incertitudes plutôt qu'en maximisant uniquement la fidélité vis-à-vis des données. Couplée à des techniques de réduction de modèle et de construction de métamodèles, nous appliquons cette démarche à une structure de complexité industrielle représentative du contexte industriel.

**Mots-clés :** dynamique des structures, analyse de robustesse info-gap, expansion, optimisation, réduction de modèle

## Abstract:

The complex structural dynamic behavior of alternator must be well understood in order to insure their reliable and safe operation. The numerical model is however difficult to construct mainly due to the presence of a high level of uncertainty. The objective of this work is to provide decision support tools in order to assess the vibratory levels in operation before to restart the alternator. Based on info-gap theory, a first decision support tool is proposed: the objective here is to assess the robustness of the dynamical response to the uncertain modal model. Based on real data, the calibration of an info-gap model of uncertainty is also proposed in order to enhance its fidelity to reality. Then, the extended constitutive relation error is used to expand identified mode shapes which are used to assess the vibratory levels. The robust expansion process is proposed in order to obtain robust expanded mode shapes to parametric uncertainties. In presence of lack-of-knowledge, the trade-off between fidelity-to-data and robustness-to-uncertainties which expresses that robustness improves as fidelity deteriorates is emphasized on an industrial structure by using both reduced order model and surrogate model techniques.

**Keywords:** structural dynamics, info-gap robustness analysis, expansion, optimization, reduced order model.

The logo for the SPIM (École doctorale SPIM) features a stylized 'S' followed by the letters 'PIM' in a large, white, sans-serif font. A yellow horizontal bar is positioned to the left of the 'S'.

■ École doctorale SPIM 16 route de Gray F - 25030 Besançon cedex

■ tél. +33 (0)3 81 66 66 02 ■ [ed-spim@univ-fcomte.fr](mailto:ed-spim@univ-fcomte.fr) ■ [www.ed-spim.univ-fcomte.fr](http://www.ed-spim.univ-fcomte.fr)

The logo of the University of Franche-Comté (UFC) features a stylized 'U' and 'FC' in a large, black, sans-serif font. Below the letters, the text 'UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ' is written in a smaller, black, sans-serif font. A yellow vertical bar is positioned to the left of the 'U'.

